10.2.2020 ט"ו בשבט תש"פ

פתרון מועד א סמסטר א 2020

צוות הקורס: תום בן־אמו, נטלי שלום, סתיו אילן מספר קורס: 0366110501

- אורך המבחן 3 שעות.
- אסור להשתמש בחומרי עזר, מותר להשתמש במחשבון. מותר להסתמך על כל הטענות שראינו בשיעור, אם אתם מסתמכים על טענה, צטטו אותה במדויק.
- שאלה 5 היא שאלת חובה. עליכם לבחור 3 שאלות מתוך השאלות 1־4 משקל כל שאלה 25 נקודות. הציון בקורס לא ייעלה על 100. במידה ותמצאנה 5 שאלות במחברת המבחן, 4 השאלות הראשונות תבדקנה.
- רק תשובה מנומקת היטב ונכונה מקנה ציון מלא על שאלה. תשובה "אינני יודע/ת" בלבד תזכה ב־15% משווי הסעיף. רק בשאלות בהן רשום "אין צורך להוכיח" אין צורך להוכיח.

שאלה 1

הוכיחו את משפט קנטור שרדר ברנשטיין: אם $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|$ אז $|A| = |B|$.

הנחיה: ניתן לסיים את ההוכחה בהגדרת הפונקציה ההפיכה המעידה על שיווין העוצמות $|A| = |Im(g)|$ (ואין צורך להוכיח חח"ע־יות ועל) באשר $g : B \to A$ היא פונקציה חח"ע.

שאלה 2

לכל $M \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, נגדיר יחס E_M על קבוצת הפונקציות $^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ ע"י

$$E_M = \{\langle f, g\rangle \in (^{\mathbb{N}}\mathbb{N})^2 \mid \exists z \in \mathbb{Z}.\forall n \in \mathbb{N}.f(n) = g(n) + z \;\; mod(M)\}$$

תזכורת: עבור שני מספרים טבעיים x, y, נגדיר $x = y \;\; mod(M)$ אם $\exists k \in \mathbb{Z}.x - y = k \cdot M$.

א. הוכיחו כי לכל $M \in \mathbb{N}$, היחס E_M הוא יחס שקילות בקבוצה $^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$.

פתרון: יהי $M \in \mathbb{N}$.

רפלקסיביות: יהי $f \in {^{\mathbb{N}}\mathbb{N}}$. נגדיר $z = 0$, אז לכל $n \in \mathbb{N}$, $f(n) - f(n) = 0 \cdot M$ ולכן

$$f(n) = f(n) + 0 \;\; mod(M)$$

אזי $\langle f, f\rangle \in E_M$.

סימטריות: יהיו $f, g \in {^{\mathbb{N}}\mathbb{N}}$, נניח כי $\langle f, g\rangle \in E_M$. מכיוון ו־$fE_Mg$, קיים $z \in \mathbb{Z}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = g(n) + z \;\; mod(M)$. כעת נוכיח כי $\langle g, f\rangle \in E_M$, נגדיר $z' = -z$, ויהי $n \in \mathbb{N}$. קיים k כך ש־ $f(n) - (g(n) + z) = k \cdot M$ ולכן $g(n) - (f(n) - z) = -k \cdot M$ ולכן

$$g(n) = f(n) + z' \;\; mod(M)$$

אזי $\langle g, f\rangle \in E_M$.

טרנזיטיביות: יהיו $f, g, h \in {^{\mathbb{N}}\mathbb{N}}$. נניח כי $\langle f, g\rangle, \langle g, h\rangle \in E_M$, אזי קיימים $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ המעידים על כך בהתאמה. נוכיח כי $\langle f, h\rangle \in E_M$, נגדיר $z = z_1 + z_2$ ויהי $n \in \mathbb{N}$. קיימים $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש־

$$f(n) - (g(n) + z_1) = k_1 \cdot M \qquad g(n) - (h(n) + z_2) = k_2 \cdot M$$

נחבר את שתי המשוואות ונקבל:

$$f(n) - (h(n) + z_1 + z_2) = (k_1 + k_2) \cdot M$$

ולכן

$$f(n) = h(n) + z \;\; mod(M)$$

אזי $\langle f, h\rangle \in E_M$.

ב. הביאו דוגמא לשני איברים שונים $a, b \in [f]_{E_3}$ באשר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ היא הפונקציה המוגדרת ע"י $f(n) = n^2$. יש לתת הגדרה פורמלית ואין צורך להוכיח.

פתרון: ניקח את אחד האיברים להיות f בעצמה ואת האיבר השני, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שמוגדר ע"י

$$g(n) = n^2 + 3$$

למרות שלא צריך להוכיח, נסביר למה g מקיים את הדרוש, כדי להוכיח כי $g \in [f]_{E_3}$ נוכיח כי gE_3f. נגדיר $z = 0$ ואכן מתקיים $g(n) = f(n) + 0 \ mod(M)$.

ג. תהא $F : \mathbb{N} \to ({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}/E_M)$. הביאו דוגמא לאיבר $[g]_{E_M} \in ({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}/E_M) \setminus Im(F)$. הוכיחו תשובתכם.

פתרון: נגדיר $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$g(n) = \begin{cases} f_{\frac{n}{2}}(n) & n \in \mathbb{N}_{even} \\ f_{\frac{n-1}{2}}(n) + 1 & n \in \mathbb{N}_{odd} \end{cases}$$

נוכיח כי $[g]_{E_M} \notin Im(F)$. נניח בשלילה כי קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $F(n_0) = [g]_{E_M}$. אזי $[g]_{E_M} = [f_{n_0}]_{E_M}$ ובפרט $gE_mf_{n_0}$. אזי קיים $z \in \mathbb{Z}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = f_{n_0}(n) + z \ mod(M)$. בפרט,

$$(I) \ \ g(2n_0) = f_{n_0}(2n_0) + z \ mod(M) \qquad (II) \ \ g(2n_0 + 1) = f_{n_0}(2n_0 + 1) + z \ mod(M)$$

מהגדרת g, $g(2n_0) = f_{n_0}(2n_0)$ ו־$g(2n_0 + 1) = f_{n_0}(2n_0 + 1) + 1$ ממשוואות $(I) - (II)$ נקבל

$$0 = z \ mod(M) \quad 1 = z \ mod(M)$$

ולכן קיימים $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש־ $z = M \cdot k_1$ וגם $z = M \cdot k_2 + 1$. ולכן $M(k_1 - k_2) = 1$ כלומר $\frac{1}{M} = k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$ אבל זה לא ייתכן שכן $M \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. סתירה.

שאלה 3

יהי $R = \{\langle n, m\rangle \in \mathbb{Z} \mid |n| < |m|\}$.

א. הוכיחו/הפריכו: R יחס סדר חזק על $\mathbb{Z}$.

פתרון: הוכיחו! נוכיח טרנזיטיביות ואנטי סימטריה חזקה. טרנזיטיביות: נניח כי $\langle n_1, n_2\rangle, \langle n_2, n_3\rangle \in R$ אז $|n_1| < |n_2| < |n_3|$ ולכן מטרנזיטיביות של היחס $<$ על מספרים טבעיים, $|n_1| < |n_3|$ ולכן $\langle n_1, n_3\rangle \in R$.
אנטי סימטרי חזק: נניח כי nRm אז $|n| < |m|$ מכיוון ו־$<$ אנטי סימטרי חזק נקבל כי $\neg(|m| < |n|)$ ולכן $\neg(mRn)$.

ב. הביאו דוגמא (אין צורך להוכיח ויש לתת דוגמא פורמלית בלבד) ליחס סדר קווי S כך ש־ $R \subseteq S$.

פתרון: נגדיר לדוגמא

$$S = R \cup \{\langle n, -n\rangle \mid n \in \mathbb{N}_+\}$$

האינטואיציה היא ש־R מסדר את כל האיברים למעט האיברים זוג איברים בעלי אותו ערך מוחלט, דהיינו $n, -n$. כדי להשלים את R לסדר קווי, צריך להוסיף את אחד הזוגות $\langle n, -n\rangle, \langle -n, n\rangle$ (ורק אחד מהם).

ג. חשבו את עוצמת קבוצת כל יחסי הסדר הקווים על $\mathbb{Z}$ שמכילים את R.

פתרון: נסמן ב־

$$A = \Big\{S \in P(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \mid R \subseteq S\Big\}$$

נשתמש במשפט קש"ב כדי לחשב את $|A|$. תחילה $A \subseteq P(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ ולכן

$$|A| \leq |P(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})| = 2^{|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

כאשר השתמשנו במשפטים: $|P(A)| = 2^{|A|}$ וב־$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. כעת נגדיר פונקציה חח"ע $F : P(\mathbb{N}_+) \to A$ באופן הבא:

$$F(X) = R \cup \{\langle x, -x\rangle \mid x \in X\} \cup \{\langle -x, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}_+ \setminus X\}$$

תחילה נוכיח כי F מוגדרת היטב, כלומר כי $F(X) \in A$ לכל $X \in P(\mathbb{N}_+)$. תחילה, ברור כי $R \subseteq F(X)$ לפי הגדרת F. נוכיח כי זה יחס סדר חזק וקווי:
<u>אנטי סימטריה חזקה:</u> נניח כי $\langle n, m\rangle \in F(X)$. אם $|n| = |m|$ אז לפי הגדרת $F(x)$, $n = -m$. בה"כ $n \in \mathbb{N}_+$, אז לפי הגדרת $F(X)$, בהכרח $n \in X$ ולכן $n \notin \mathbb{N}_+ \setminus X$ אזי $\langle m, n\rangle \notin F(X)$. אם $|m| < |n|$ אז $\neq (|m| < |n|)$ ולכן $\langle m, n\rangle \notin F(X)$.
<u>טרנזיטיביות:</u> נניח כי $\langle n_1, n_2\rangle, \langle n_2, n_3\rangle \in F(X)$. נוכיח כי $\langle n_1, n_3\rangle \in F(X)$. בכל מקרה, מתקיים $|n_1| \leq |n_2| \leq |n_3|$. אם $|n_1| < |n_2| \vee |n_2| < |n_3|$ אז $|n_1| < |n_3|$ ולכן $\langle n_1, n_3\rangle \in R \subseteq F(X)$. נניח בשלילה כי המקרה השני מתקיים, $|n_1| = |n_2| = |n_3|$ אזי $n_1 = -n_2$ ו־ $n_3 = -n_2$ לפי הגדרת $F(X)$. ולכן $n_1 = -n_2 = n_3$. אזי $\langle n_1, n_2\rangle, \langle n_2, n_1\rangle \in F(X)$ בסתירה לאנטי סימטריה חזקה שכבר הוכחה.
<u>קווי:</u> יהיו $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, אם $|n_1| \neq |n_2|$ אז לפי הגדרת R מתקיים $n_1Rn_2 \vee n_2Rn_1$ ולכן גם $n_1F(x)n_2 \vee n_2F(X)n_1$. נניח כי $|n_1| = |n_2|$. אזי $n_1 = \pm n_2$. אם $n_1 = n_2$ סיימנו. נניח כי $n_1 = -n_2$ ובה"כ נניח כי $n_1 \in \mathbb{N}_2$. אם $n_1 \in X$ אז $\langle n_1, -n_1\rangle \in F(X)$ ולכן $n_1F(X)n_2$. אם $n_1 \notin X$ אז $\langle -n_1, n_1\rangle \in F(X)$ ולכן $n_2F(X)n_1$. ב
כעת נוכיח כי F חח"ע. יהיו $X_1 \neq X_2$ בה"כ, יש $x \in X_1 \setminus X_2$, אזי $\langle x, -x\rangle \in F(X_1)$ אבל $\langle x, -x\rangle \notin F(X_2)$ ולכן $F(X_1) \neq F(X_2)$.
אם כך הוכחנו כי

$$2^{\aleph_0} = 2^{|\mathbb{N}_+|} = |P(\mathbb{N}_+)| \leq |A|$$

ולפי קש"ב נקבל $|A| = 2^{\aleph_0}$.

שאלה 4

יהי E יחס שקילות בקבוצה $\mathbb{N}$. תהא $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}/E$ העתקת המנה המוגדרת ע"י $h(n)=[n]_E$.
נגדיר כי פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ היא בלתי תלויה בבחירת הנציגים אם

$$\forall x,y\in\mathbb{N}.\langle x,y\rangle\in E\to f(x)=f(y)$$

תהא X קבוצת כל הפונקציות שהן בלתי תלויות בבחירת הנציגים.

א. הוכיחו כי $f\in X$ אמ"ם קיימת $f':\mathbb{N}/E\to\mathbb{N}$ כך ש- $f=f'\circ h$.

ב. הוכיחו כי $|X|=|\mathbb{N}|^{|\mathbb{N}/E|}$.

שאלה 5

תהא B קבוצה. פונקציה $f:B\to B$ נקראת תמורת חילופים, אם $f\circ f=id_B$ ולכל $x\in B$ מתקיים $f(x)\neq x$.

א. הביאו דוגמא (אין צורך להוכיח ויש לתת הגדרה פורמלית בלבד) לתמורת חילופים על $\mathbb{Z}$.

פתרון: נגדיר $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ע"י $f(z)=1-z$. בדקו שאכן שני התנאים מתקיימים.

ב. הוכיחו באמצעות הלמה של צורן כי לכל קבוצה A קיימת תמורת חילופים f כך ש- $dom(f)\subseteq A$ ומתקיים $|A\setminus dom(f)|\le 1$.

פתרון: נגדיר יחס סדר

$$\Sigma=\left\{f\subseteq A\times A \mid f \text{ IS A PARTIAL FUNCTION OF } A\wedge f\circ f=id_{dom(f)}\wedge\forall x\in dom(f).f(x)\neq x\right\}$$

על Σ נגדיר את יחס ההכלה. נוכיח כי $\Sigma,\subseteq$ עומדת בתנאי הלמה של צורן. נשים לב כי $\emptyset:\emptyset\to\emptyset$ פונקציה חלקית ל-A שכן $\emptyset\subseteq A$. יתר על כן $\emptyset\circ\emptyset=\emptyset=id_\emptyset$. הטענה $\forall x\in\emptyset.\emptyset(x)\neq x$ מתקיימת באופן ריק ולכן $\emptyset\in\Sigma$ אזי $\Sigma\neq\emptyset$.
כעת נוכיח את התנאי השני, תהא $C\subseteq\Sigma$ שרשרת. נגדיר $f=\cup C$ נוכיח כי f חסם עליון ב-Σ ל-C. תחילה, ראינו בכיתה כי לכל $g\in C$ מתקיים כי $g\subseteq\cup C=f$ ולכן f חסם עליון. נוכיח כי $f\in\Sigma$.
לפי טענה מהרשימות, f פונקציה חלקית, ומתקיים

$$(I)\quad dom(f)=\bigcup_{g\in C}dom(g)$$

ולכל $g\in C$ מתקיים כי

$$(II)\quad f\restriction dom(g)=g$$

מכיוון וכל $g\in C$ היא ב-Σ אז $g\subseteq A\times A$ ולכן $f\subseteq A\times A$ כאיחוד של קבוצות כאלה.
נוכיח כי $f\circ f=id_{dom(f)}$ יהי $x\in dom(f)$ אזי לפי (I) קיים $g\in C$ כך ש- $x\in dom(g)$. מכיוון ו- $g\in\Sigma$ אז $g\circ g=id_{dom(g)}$ ולכן $g(g(x))=x$ ובפרט $g(x)\in dom(g)$. לפי (II) $f(x)=g(x)\wedge f(g(x))=g(g(x))$ ולכן

$$f(f(x))=f(g(x))=g(g(x))=x$$

בנוסף, ניתן להסיק כי $g(x)\neq x$ ולכן $f(x)=g(x)\neq x$. אזי $f\in\Sigma$. הוכחנו כי תנאי הלמה של צורן מתקיימים ולכן קיים $f^*\in\Sigma$ איבר מירבי. נוכיח כי f^* כדרוש. לפי הגדרת Σ, f^* היא תמורת חילופים ולכן מספיק להוכיח כי $|A\setminus dom(f^*)|\le 1$. נניח בשלילה שזה לא המצב, אז קיימים $a,b\in A\setminus dom(f^*)$ שונים. נגדיר $F:dom(f^*)\cup\{a,b\}\to dom(f^*)\cup\{a,b\}$ באופן הבא:

$$F(x)=\begin{cases}f^*(x) & x\in dom(f^*)\\ b & x=a\\ a & x=b\end{cases}$$

מכיוון ו- $a,b\notin dom(f^*)$, לפי טענה מהרשימות F אכן יחס חד ערכי ומכיוון ו- $a,b\in A$ אז $F\subseteq A\times A$ ולכן פונקציה חלקית ל-A.
נוכיח כי $F\circ F=id_{dom(F)}$ יהי $x\in dom(F)$ אם $x\in dom(f^*)$ אז $F(x)=f^*(x)$ וגם $f^*(x)\in dom(f^*)$ שכן $f^*\circ f^*=id_{dom(f^*)}$ לפי ההנחה ש- $f^*\in\Sigma$. לכן שוב מהגדרת F נקבל

$$F(F(x))=F(f^*(x))=f^*(f^*(x))=x$$

אם $x=a$ אז $F(F(a))=F(b)=a$ ובאופן דומה אם $x=b$. כעת נוכיח כי $F(x)\neq x$ לכל x בתחום. שוב נחלק למקרים, אם $x\in dom(f^*)$ אז $F(x)=f(x)\neq x$, אם $x=a$ אז מכיוון ו- a,b שונים נקבל $F(a)=b\neq a$ ובאופן דומה אם $x=b$. סכ"ה הוכחנו כי $F\in\sigma$. מתקיים כי $f^*\subseteq F$ שכן $F=f^*\cup\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$ ומכיוון ו- $a,b\notin dom(f^*)$ אז $f^*\subsetneq F$, זו סתירה למירביות f^*. ולכן $|A\setminus dom(f^*)|\le 1$ כדרוש.

בהצלחה!