28.2.2021 ט"ז באדר תשפ"א

מבחן במבוא לתורת הקבוצות סמסטר א' מועד ב'

צוות הקורס: תום בנאמו, פלג בר־לב, יבגני לבנזוב   מספר קורס: 0366110501

- המבחן הינו מבחן בית עם השגחה ב־*zoom*. משך המבחן הינו 3 שעות.
- בקורס יש חובת הגשה של 9 תרגילי בית, מי שלא עמד בחובת ההגשה לא יוכל לגשת למועד א'. אנא ודאו שעמדתם בחובת ההגשה.
- ההנחיות שרשומות כאן הן בנוסף להנחיות הבחינה שפרסמה האוניברסיטה לבחינת בית עם השגחה ב־*zoom*.
- במהלך המבחן, מותר להשתמש רק ברשימות הקורס. חל איסור לגשת למחשב במהלך הבחינה למעט צורכי העלאת הסריקה של הפתרון ולצורך שליחת שאלה לצוות הקורס, בכל אופן יש ליידע את משגיחי הבחינה על כך. מותר להסתמך טענה מסוימת ללא הוכחה אם ורק אם הטענה הופיעה בשיעור. אם אתם מסתמכים על טענה, צטטו אותה במדויק.
- שאלה 5 היא שאלת חובה. עליכם לבחור 3 שאלות מתוך השאלות 1־4 משקל כל שאלה 25 נקודות. הציון בקורס לא ייעלה על 100. במידה ותמצאנה 5 שאלות במחברת המבחן, 4 השאלות הראשונות תבדקנה.
- רק תשובה מנומקת היטב ונכונה מקנה ציון מלא על שאלה. תשובה "אינני יודע/ת" בלבד תזכה ב־20% משווי הסעיף. רק בשאלות בהן רשום "אין צורך להוכיח" אין צורך להוכיח.
- את המבחן יש לכתוב לפתור על גבי מחברת פיזית (ולא בטאבלט או מחברת אלקטרונית בסוג כלשהו), בסיום המבחן יש לסרוק את המבחרת ולהעלות את הסריקה לרכיב הייעודי שנפתח עבור הגשת המבחן באתר הקורס *moodle*. המבחן כולל 15 דקות לצורכי התארגנות, סריקת המבחן והעלאתו ל־*moodle*.
- יש למלא את הצהרת טוהר הבחינות הנמצאת ברכיב הגשת המבחן באתר הקורס.
- קובץ המחברת הסרוקה צריך להיות קובץ *pdf* יחיד, הסריקה ברורה, לא מסובבת וסדר השאלות נכון. אי עמידה בתנאים אלו תגרור הורדה בציון.
- אנא ודאו טרם מועד המבחן כי יש באפשרותכם לעמוד בכל ההנחיות, לא תתאפשר חריגה.
- שאלות לצוות הקורס במהלך הבחינה ייתאפשרו באמצעות פורום שיוקם במיוחד באתר הקורס, במהלך המבחן יוגדרו זמנים שבהם ניתן יהיה לגשת למבחן לשלוח שאלות לצוות הקורס.

הנחיות הפקולטה לבחינת בית עם השגחה בזום:

1. סטודנטים שיכנסו לבחינה ב *Moodle* ייחשבו כנבחנים גם אם לא יגישו הבחינה.
2. סטודנטים שהמצלמה שלהם תהיה כבויה מעל 5 דקות – בחינתם תפסל.
3. ־ סטודנטים שיצאו מתחום המצלמה, כולל לשירותים, ללא עדכון המשגיח בצ'ט ו/או מעל ל 6 דקות יועברו לוועדת משמעת.
4. תוספות הזמן האישיות לזכאים יחושבו מראש (לא כולל זמן ההתארגנות).
5. יש לעמוד בזמני ההגשה. רכיב ההגשה ב־ *Moodle* ינעל להגשה לאחר תום הזמן.
6. להלן דרכי התקשרות במקרה של תקלה:

(א) סטודנטים הנתקלים בבעיה בכניסה ל *Moodle* ־ בעיות של הזדהות וסיסמה – יש להפנות לתמיכה בטלפון: 6408888 – 03

(ב) סטודנטים הנתקלים בבעיה טכנית כללית ־ יש להפנות לצוות המחשב של הפקולטה ־ 6406170 – 03 או למזכירות בחינות 6408338 – 03

שאלה 1

יהיו $f,g:\mathbb{N}\to P(\mathbb{R})$. נגדיר $h:\mathbb{N}\to P(\mathbb{R})$ ע"י $h(n)=f(n)\cup g(n)$. הוכיחו/הפריכו:

<u>א.</u> אם f,g חח"ע אז h חח"ע.

פתרון: הפרכה, לדוגמא עבור $f(n)=\{n\}$ ו־

$$g(n)=\begin{cases}\{1\} & n=0\\ \{0\} & n=1\\ \{n\} & else\end{cases}$$

ברור כי שתי הפונקציות חח"ע אבל

$$h(0)=g(0)\cup f(0)=\{0\}\cup\{1\}=\{0,1\}=\{1\}\cup\{0\}=g(1)\cup f(1)=h(1)$$

ולכן h לא חח"ע.

<u>ב.</u> עבור יחס הסדר $\leq$ הרגיל על הטבעיים ויחס סדר ההכלה על $P(\mathbb{R})$. אם $f,g:\mathbb{N}\to P(\mathbb{R})$ שומרות סדר אז h שומרת סדר.

פתרון: הפרכה, נגדיר $f(n)=\mathbb{N}\cap[0,n]=\{0,...,n\}$ לכל n ו־

$$g(n)=\begin{cases}\{1\} & n=0\\ \{0,1\} & n=1\\ f(n) & else\end{cases}$$

. אז f שומרת סדר כי אם $n_1\leq n_2$ אז $f(n_1)=\{0,...,n_1\}\subseteq\{0,...,n_2\}=f(n_2)$ ואם $f(n_1)\subseteq f(n_2)$ אז $\{0,...,n_1\}\subseteq\{0,..,n_2\}$ ובפרט $n_1\in\{0,..,n_2\}$ ולכן $n_1\leq n_2$.

ההוכחה כי g שומרת סדר דומה להוכחה כי f שומרת סדר רק מחלקים למקרים עם $0,1$.

אבל h אינה שומרת סדר שכן $h(0)=g(0)\cup f(0)=\{0,1\}=g(1)\cup f(1)=h(1)$

כלומר h אינה חח"ע וראינו בכיתה כי פונקציה שומרת סדר שתחומה יחס סדר קווי היא בהכרח חח"ע.

<u>ג.</u> אם $\cup Im(h)=\mathbb{R}$ אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־$|f(n)|>\aleph_0\vee|g(n)|>\aleph_0$.

פתרון: נניח בשלילה כי לכל n, $|f(n)|,|g(n)|\leq\aleph_0$ אז לפי משפט שראינו בכיתה) איחוד לכל היותר בנמנייה, לדוגמא של 2 קבוצות, של קבוצות לכל היותר בנות מנייה הוא לכל היותר בנמנייה) $|h(n)|=|f(n)\cup g(n)|\leq\aleph_0$. כעת נשים לב כי $\mathbb{R}=\cup Im(h)=_{n\in\mathbb{N}}h(n)$ שזה איחוד בנמנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה ולכן $|\mathbb{R}|=|\cup Im(h)|\leq\aleph_0$. זו סתירה למה שנלמד בכיתה כי $|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}>\aleph_0$.

שאלה 2

למספר טבעי $c\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ ו־$r\in\{0,...,c-1\}$, נסמן את קבוצת המספרים ששארית החלוקה שלהם ב־c היא r ע"י

$$B_{c,r}=\{n\in\mathbb{N}\mid\exists k\in\mathbb{N}.n=ck+r\}$$

<u>א.</u> תהא $X\subseteq\mathbb{N}$ קבוצה כך ש־ $\forall x\in X.\quad x+100\in X$. הוכיחו כי

$$\forall r\in\{0,...,99\}.\ X\cap B_{100,r}\neq\emptyset\longrightarrow B_{100,r}\setminus\{0,...,\min(X\cap B_{100,r})-1\}=X\cap B_{100,r}$$

פתרון: יהא $r\in\{0,\ldots,99\}$ ונניח כי $X\cap B_{100,r}\neq\emptyset$. נסמן $z=\min(X\cap B_{100,r})$ (המינימום קיים כי $X\cap B_{100,r}$ היא תת־קבוצה לא ריקה של טבעיים). נוכיח באינדוקציה כי לכל $x\in X$ מתקיים $x+100k\in X$ לכל $k\in\mathbb{N}_+$. יהא $x\in X$. בסיס: עבור $k=1$, $x+100\in X$ לפני הנתון. הנחה: נניח כי $x+100k\in X$ עבור k טבעי. מעבר: מהנתון, $x+100k+100=x+100(k+1)\in X$, כנדרש.

כעת, נראה כי $B_{100,r}\setminus\{0,\ldots,\min(X\cap B_{100,r})-1\}=X\cap B_{100,r}$ על־ידי הכלה דו־כיוונית:

$\subseteq$: יהא $x\in B_{100,r}\setminus\{0,\ldots,\min(X\cap B_{100,r})-1\}$. בפרט, $x=100k+r$ עבור k טבעי כלשהו. כמו כן, מתקיים כי $z=\min(X\cap B_{100,r})\leq x$. מתקיים כי $z=100p+r$ עבור $p\leq k$ טבעי כלשהו. בפרט, $x=z+100(k-p)$ (נשים לב כי $k-p\geq 0$). לכן, מהיות $z\in X$ ומהטענה שהוכחנו לעיל, $x\in X$, ולכן $x\in X\cap B_{100,r}$.

$\supseteq$: יהא $x\in X\cap B_{100,r}$. מכאן, $x=100k+r$ עבור k טבעי כלשהו וכן $x\geq z=\min(X\cap B_{100,r})$. לכן, $x\in B_{100,r}\setminus\{0,\ldots,\min(X\cap B_{100,r})-1\}$.

הערה: למעשה הראינו כי אם $x\in X$ הוא האיבר הקטן ביותר ב־X אשר שארית החלוקה שלו ב־100 היא r, אזי כל מספר שגדול מ־x וששארית החלוקה שלו ב־100 היא גם r, שייך ל־X.

<u>ב.</u> חשבו את עוצמת הקבוצה $\{X\in P(\mathbb{N})\mid\forall n\in X.n+1\in X\}$. בהוכחתכם, אם הגדרתם פונקציה, ניתן לציין מבלי להוכיח כי הפונקציה חח"ע ו/או על.

פתרון: נסמן $A=\{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\mid\forall n\in X.(n+1\in X)\}$. נראה כי $|A|=\aleph_0$. נשים לב כי אם עבור קבוצה $X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ מתקיים כי $\forall n\in X.(n+1\in X)$, אזי לכל $n\in X$ מתקיים כי $x+k\in X$ לכל k טבעי (ההוכחה היא באינדוקציה על k, וזהה לזו שבסעיף א'). לכן, או ש־$X=\emptyset$, או שאם $z=\min X$ אזי $X=\{n\in\mathbb{N}\mid z\leq n\}$ (בפרט, $A=\{\{n\in\mathbb{N}\mid z\leq n\}\mid z\in\mathbb{N}\}\cup\{\emptyset\}$). כעת, נראה פונקציית שקילות $f:\mathbb{N}\to A$. נגדיר:

$$.f(x)=\begin{cases}\emptyset & ,\ x=0\\ \{n\in\mathbb{N}\mid x-1\leq n\} & ,\ x>0\end{cases}$$

מהסבר קודם נובע כי f מוגדרת היטב, וכן שהיא חח"ע ועל. לכן, $|A| = \aleph_0$.

<u>ג.</u> חשבו את עוצמת הקבוצה $\{X \in P(\mathbb{N}) \mid \exists c \in \mathbb{N}_+ . \forall n \in X . n + c \in X\}$.

פתרון: נסמן $Y = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \,|\, \exists c \in \mathbb{N}_+ \, \forall n \in X.(n + c \in X)\}$. נשים לב כי עבור A מסעיף ב' מתקיים כי $A \subseteq Y$, הואיל ואם $X \in A$ אזי X מקיימת את התנאי בהגדרת Y עם $c = 1$. מכאן, $\aleph_0 = |A| \leq |Y|$. כעת, עבור $c \in \mathbb{N}_+$ נסמן $Y_c = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \,|\, \forall n \in X.(n + c \in X)\}$. קל לראות שמתקיים כי $Y = \bigcup_{c \in \mathbb{N}_+} Y_c$, כלומר Y היא איחוד בן־מניה של קבוצות.
כעת נראה שכל Y_c היא בת־מניה. בסעיף ב' הוכחנו כי $|Y_1| = |A| = \aleph_0$. יהא $c \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. נשים לב שכל $n \in \mathbb{N}$ שייך לבדיוק אחת מהקבוצות $B_{c,r}$ ($r \in \{0, \ldots, c-1\}$), בהתאם לשארית החלוקה שלו ב־c. כלומר, $\{B_{c,r}\}_{r \in \{0,\ldots,c-1\}}$ היא חלוקה של $\mathbb{N}$. מכאן, לכל $X \in Y_c$ מתקיים כי $X = \bigcup_{r \in \{0,\ldots,c-1\}} (X \cap B_{c,r})$ (וזהו איחוד זר). נגדיר פונקציה $g_c : Y_c \to (\mathbb{N} \cup \{-1\})^c$ באופן הבא: $g_c(X) = (a_0, \ldots, a_{c-1})$, כאשר $a_r = \min(X \cap B_{c,r})$ אם $X \cap B_{c,r} \neq \emptyset$, ו־$a_r = -1$ אחרת, כאשר $0 \leq r \leq c-1$. קל לראות כי g_c מוגדרת היטב. נראה כי g_c חח"ע: יהיו $X_1, X_2 \in Y_c$ כך ש־$g_c(X_1) = g_c(X_2)$. בפרט, אם $g_c(X_1) = (a_0, \ldots, a_{c-1})$, $g_c(X_2) = (b_0, \ldots, b_{c-1})$, אזי $a_r = b_r$ לכל r. מכאן, אם $a_r \neq -1$ עבור r כלשהו, אזי $a_r = \min(X_1 \cap B_{c,r}) = \min(X_2 \cap B_{c,r}) = b_r$. לפי סעיף א', $B_{c,r} \backslash \{0, \ldots, a_r - 1\} = X_1 \cap B_{c,r}$ וכן $B_{c,r} \backslash \{0, \ldots, a_r - 1\} = X_2 \cap B_{c,r}$. לכן, $X_1 \cap B_{c,r} = X_2 \cap B_{c,r}$; מנגד, אם $a_r = -1$, אזי $X_1 \cap B_{c,r} = X_2 \cap B_{c,r} = \emptyset$. מכאן, $X_1 \cap B_{c,r} = X_2 \cap B_{c,r}$ לכל r, ומהטענה שהצגנו לעיל נובע כי $X_1 = X_2$, ולכן g_c חח"ע. מכאן, $|Y_c| \leq |\mathbb{N} \cup \{-1\}|^c = \aleph_0$. לכן, ממשפט קש"ב, $|Y_c| = \aleph_0$. מכאן, Y היא איחוד בן־מניה של קבוצות בנות־מניה, ולכן $|Y| = \aleph_0$.

שאלה 3

יהיו A, B קבוצות <u>זרות</u> ו־R_1, R_2 יחסי סדר חלשים על A, B בהתאמה. נגדיר את היחס $R_1 + R_2$ על הקבוצה $A \cup B$:

$$R_1 + R_2 = R_1 \cup R_2 \cup (A \times B)$$

<u>א.</u> הוכיחו כי $R_1 + R_2$ יחס סדר חלש על $A \cup B$.

פתרון:
<u>רפלקסיביות:</u> יהי $x \in A \cup B$, בה"כ $x \in A$. אז מרפלקסיביות R_1 נובע כי $\langle x, x \rangle \in R_1 \subseteq R_1 + R_2$, כדרוש.
<u>אנטי־סימטריה חלשה:</u> יהיו $x, y \in A \cup B$ כך ש־ $\langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \in R_1 + R_2$. בה"כ $x \in A$, נניח בשלילה כי $y \in B$ אבל אז $\langle y, x \rangle \in (B \times A) \cap (R_1 + R_2) = \emptyset$ בסתירה. לכן $y \in A$ ומכאן ש־ $\langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \in (A \times A) \cap (R_1 + R_2) = R_1$. מאנטי־סימטריה חלשה של R_1 נקבל $x = y$, כדרוש.
<u>טרנזיטיביות:</u> יהיו $x, y, z \in A \cup B$ כך ש־$\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R_1 + R_2$. ראשית, נניח כי $x \in B$. אז $y \in B$ כי אחרת $\langle x, y \rangle \in (B \times A) \cap (R_1 + R_2) = \emptyset$ וזו סתירה. מאותו הטיעון נקבל כי $z \in B$, ולכן $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in (B \times B) \cap (R_1 + R_2) = R_2$. מטרנזיטיביות R_2 נקבל $\langle x, z \rangle \in R_2 \subseteq R_1 + R_2$, כדרוש. שנית, נניח כי $x \in A$. אם $z \in B$ אז סיימנו כי $\langle x, z \rangle \in A \times B \subseteq R_1 + R_2$. אחרת, $z \in A$ ומאותו הטיעון מקודם נקבל כי $y \in A$, וכמו קודם מטרנזיטיביות R_1 נובע הדרוש.

<u>ב.</u> הביאו דוגמא (אין צורך להוכיח) לקבוצות A, B זרות ואינסופיות, ויחסי סדר חלשים R_1, R_2 על A, B בהתאמה כך ש־

$$\langle A \cup B, R_1 + R_2 \rangle \simeq \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{LEX} \rangle$$

פתרון: נקח את $A = \mathbb{N}$ ואת $B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ עם יחסי הסדר $R_1 = \leq$ יחס הסדר הרגיל על הטבעיים ו־ $R_2 = \leq_{LEX}$ יחס הסדר הלקסיקוגרפי שמתקבל ממנו.

<u>ג.</u> לכל קבוצה $X \subseteq P(\mathbb{N})$ נסמן $\subseteq_X = \left\{ \langle C, D \rangle \in X^2 \mid C \subseteq D \right\}$. הוכיחו/ הפריכו:

$$\left\langle P(\mathbb{N}_{even}) \cup (P(\mathbb{N}_{odd}) \setminus \{\emptyset\}), \subseteq_{P(\mathbb{N}_{even})} + \subseteq_{P(\mathbb{N}_{odd}) \setminus \{\emptyset\}} \right\rangle \simeq \left\langle P(\mathbb{N}), \subseteq_{P(\mathbb{N})} \right\rangle$$

פתרון: נפריך: נסמן נניח בשלילה כי קיים איזומורפיזם $f : P(\mathbb{N}_{even}) \cup (P(\mathbb{N}_{odd}) \setminus \{\emptyset\}) \to P(\mathbb{N})$, ונסמן $A = f(\mathbb{N}_{even})$. נסמן גם $R = \subseteq_{P(\mathbb{N}_{even})} + \subseteq_{P(\mathbb{N}_{odd}) \setminus \{\emptyset\}}$. כעת, נשים לב כי $\emptyset R \mathbb{N}_{even}$ ולכן $f(\emptyset) R A$ וכן $f(\emptyset) \neq A$, ומכאן ש־A אינה איבר מזערי ב־$P(\mathbb{N})$ ובפרט $A \neq \emptyset$. באופן דומה, נשים לב כי $\mathbb{N}_{even} R \mathbb{N}_{odd}$ ונסיק כי A אינה איבר מירבי ב־$P(\mathbb{N})$, כלומר $A \neq \mathbb{N}$. אם כן, קיימים $x \in A, y \in \mathbb{N} \setminus A$. נסמן $B = (A \setminus \{x\}) \cup \{y\}$, אז $B \not\subseteq A \wedge A \not\subseteq B$. נסמן $X = f^{-1}(B)$, אז $(\neg \mathbb{N}_{even} R X) \wedge (\neg X R \mathbb{N}_{even})$. כעת, אם $X \in P(\mathbb{N}_{odd})$ אז $\mathbb{N}_{even} R X$ בסתירה, ואם $X \in P(\mathbb{N}_{even})$ אז $X R \mathbb{N}_{even}$ גם כן בסתירה. הגענו לסתירה, לכן לא קיים איזומורפיזם כזה.

שאלה 4

תהא $M = P(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus ({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})$.

<u>א.</u> הוכיחו ע"י לכסון כי $|M| > \aleph_0$.

פתרון: תחילה נוכיח כי $\aleph_0 \leq |M|$. נציג פונקציה חח"ע $f : \mathbb{N} \to M$. נגדיר: $f(n) = \{(0, n)\}$. ברור כי $\{(0, n)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ לכל n. כמו כן, מפני שלכל n, $\{(0, n)\}$ אינו יחס מלא, מתקיים כי ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N} \notin \{(0, n)\}$. לכן, $f(n) \in M$ לכל n, ומכאן f מוגדרת היטב. נראה כעת ש־f חח"ע. יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ כך ש־$f(a) = f(b)$. כלומר, מתקיים כי $\{(0, a)\} = \{(0, b)\}$. משיוויון סינגלטונים נובע כי $(0, a) = (0, b)$ ולכן $a = b$ ולכן f חח"ע. לכן, $\aleph_0 = |\mathbb{N}| \leq |M|$.
כעת נראה כי $\aleph_0 \neq |M|$. נניח **בשלילה** כי קיימת פונקציית שקילות $f : \mathbb{N} \to M$. נגדיר יחס g באופן הבא:

$$g = \{(0, n) \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge (0, n) \notin f(n)\}.$$

נראה כי $g\in M$. ברור כי $g\in\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. כמו כן, מהגדרת g הוא אינו יחס מלא, ולכן $g\notin{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ ומכאן $g\in M$. נראה עתה כי $g\neq f(n)$ לכל n. מהגדרת g, לכל n מתקיים כי $(0,n)\in g\triangle f(n)$. לכן, $g\neq f(n)$ לכל n. מכאן, f אינה על, בסתירה להנחת השלילה. לכן, לא קיימת פונקציית שקילות $f:\mathbb{N}\to M$ ולכן $|M|\neq\aleph_0$. מכאן, $\aleph_0<|M|$, כנדרש.

ב. הוכיחו כי $|M|=2^{\aleph_0}$.

פתרון: מפני ש־$M\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ מתקיים כי $|M|\leq|\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})|=2^{|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|}=2^{|\mathbb{N}|}=2^{\aleph_0}$. מצד שני, נסתכל על הפונקציה $h:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to M$ המוגדרת כך: $h(A)=\{(0,n)\,|\,n\in A\}$. קל לראות כי h מוגדרת היטב הואיל והיחס $h(A)$ אינו מלא לכל $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ולכן $h(A)\notin{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ ומכאן $h(A)\in M$ (נשים לב כי אם $A=\emptyset$ אזי $h(A)=\emptyset\in M$). נראה כי h חח"ע. נניח כי $h(A)=h(B)$ עבור $A,B\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$. אזי, $\{(0,n)\,|\,n\in A\}=\{(0,n)\,|\,n\in B\}$. יהא $a\in A$. מכאן, $(0,a)\in\{(0,n)\,|\,n\in A\}$ ולכן $(0,a)\in\{(0,n)\,|\,n\in B\}$ ולכן $a\in B$. מהסבר דומה, אם $b\in B$ אזי $b\in A$. מכאן, $A=B$ ולכן h חח"ע. מכאן, $2^{\aleph_0}=|\mathcal{P}(\mathbb{N})|\leq|M|$. ממשפט קש"ב, $|M|=2^{\aleph_0}$.

שאלה 5

קבוצה $X\subseteq\mathbb{R}$ נקראת אנטי חיבורית אם $\forall x,y\in X.x\neq y\to x+y\notin X$.

הוכיחו באמצעות הלמה של צורן כי קיימת $X^*\subseteq\mathbb{R}$ שהיא אנטי חיבורית וכל איבר ב־$\mathbb{R}\setminus X^*$ הוא סכום או הפרש של שני איברים ב־X^*.

פתרון: תהא $\Sigma=\{X\subseteq\mathbb{R}\mid X\neq\{0\}\wedge X$ אנטי חיבורית$\}$ עם יחס ההכלה. תחילה, $\Sigma\neq\emptyset$ שכן $\emptyset\in\Sigma$, שכן התכונה מתקיימת באופן ריק. וברור כי $\emptyset\neq\{0\}$.

לכל שרשרת קיים חסם עליון: תהא $C\subseteq\Sigma$ שרשרת ביחס הכלה. נגדיר $\sigma=\cup C$, אז ברור כי σ חסם עליון בהכלה, נוכיח כי $\sigma\in\Sigma$. יהיו $x,y\in\sigma$ כך ש־ $x\neq y$, ונניח בשלילה כי $x+y\in\sigma$. אז יש $X_1,X_2,X_3\in C$ כך ש־ $x\in X_1,\ \ y\in X_2,\ \ x+y\in X_3$. מכיוון ו־$C$ שרשרת אז בהכרח קיים $i\in\{1,2,3\}$ כך ש־ $X_1,X_2,X_3\in X_i$. בה"כ $i=1$ אז $x,y,x+y\in X_1$. מכיוון ו־$X_1\in\Sigma$ אז X_1 היא אנטי חיבורית וזו סתירה. בנוסף, נוכיח כי $\sigma\neq\{0\}$, שוב נניח בשלילה אחרת, אז $0\in\sigma$ וקיים $X\in C$ כך ש־ $0\in X$. מכיוון ו־$X\in\Sigma$ אז $X\neq\{0\}$ ולכן יש $x\in X\setminus\{0\}$. מתקיים כי ו־$X\subseteq\cup C=\sigma$ ולכן $x\in\sigma$, זו סתירה להנחה כי $\sigma=\{0\}$.

לפי הלמה של צורן יש איבר מירבי $X^*\in\Sigma$, אז X^* אנטי חיבורית ו־$X^*\neq\{0\}$ ולכן $X\neq\emptyset$, שכן הקבוצה הריקה לא איבר מירבי ב־Σ הנתונה עם יחס ההכלה ובנוסף, בהכרח $0\notin X^*$, אחרת, ניקח $x\in X^*$ כך ש־ $x\neq 0$ ואז $x+0=x\in X^*$ סתירה לאנטי חיבוריות.

יהי $r\in\mathbb{R}\setminus X^*$, אם $r=0$ אז ניקח $x\in X^*$ (קיים כי הוכחנו שהיא אינה ריקה) ואז $0=x-x$ שזה הפרש של שני איברים ב־X^*. נניח כי $r\neq 0$, ממירביות Σ $X^*\cup\{r\}\notin\Sigma$ ולכן בהכרח $X^*\cup\{r\}$ אינה אנטי חיבורית. זה אומר שיש $x,y\in X^*\cup\{r\}$ שונים כך ש־ $x+y\in X^*\cup\{r\}$. נחלק למקרים:

1. $x,y\in X^*$, מכיוון ו־$x+y\in X^*\cup\{r\}$ ו־X^* היא אנטי חיבורית אז בהכרח $x+y=r$ ו־r^* הוא סכום של שני איברים ב־X^*.
2. $x\in X^*,y\in\{r\}$ (המקרה $x\in\{r\}$, $y\in X^*$ סימטרי), לא ייתכן כי $x+y=r$ שכן $y=r$ ואז $x+r=r$ אז $x=0$ בסתירה למה שהוכחנו ש־$0\notin X^*$. ולכן $x+r\in X^*$ נסמן $y=x+r^*$ אז $r^*=y-x$ הפרש של שני איברים ב־X^*.

בהצלחה!