<u>תתי מרחב</u>

<u>משפט:</u> יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית ויהי U תת מרחב שלו. אז U גם נוצר סופית ו- $dim(U) \leq dim(V)$.

<u>הוכחה:</u> נסמן ב-n את המימד של V. אם $U = \{0\}$ אז $dim(U) = 0 \leq dim(V)$ וקבוצה הריקה פורשת לכן וU נוצר סופית. אחרת, נגדיר סדרת איברים בת״ל ב-U. יהי $u_0 \neq 0$ ב-U. אם $U = sp(u_0)$ סיימנו. אחרת, לפי הטענה הקודמת $sp(u_0) \subset U$ אז יהי $u_1 \in U \backslash sp(u_0)$. נניח הגדרנו $u_1,..., u_k$ אז $sp(u_1,..., u_k) = U$ סיימנו אחרת יהי $u_{k+1} \in U \backslash sp(u_1,..., u_k)$. ממשפט שראינו, $\{u_1,..., u_{k+1}\}$ בת״ל. התהליך חייב להסתיים לפי שנגיע ל-n+1 שכן אחרת נוכל למצוא n+1 איברים בת״ל ב-U ולכן גם ב-V (U מוכל ב-V), סתירה.

<u>משפט (הכלה ושיוויון מימדים):</u> יהי V מרחב וקטורי ויהיו U,W תתי מרחבים נוצרים סופית של V אזי $U = W \Leftrightarrow U \subseteq W \wedge dim(U) = dim(W)$.

<u>דוגמא:</u> נניח כי $(v_1 + v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_2 + v_3)$ בת״ל הוכיחו כי גם v_1, v_2, v_3 בת״ל.
<u>פתרון:</u> מכיוון ו- $v_1 + v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_2 + v_3 \in sp(v_1, v_2, v_3)$ ולכן $U = sp(v_1 + v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_2 + v_3) \subseteq sp(v_1, v_2, v_3)$. מכיוון ו-$(v_1 + v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_2 + v_3)$ בת״ל, אז $dim(U) = 3$ ולכן $3 = dim(U) \leq dim(sp(v_1, v_2, v_3)) \leq 3$. ולכן $dim(U) = dim(sp(v_1, v_2, v_3))$. מהכלה ושיוויון מימדים נקבל כי $U = sp(v_1, v_2, v_3)$. נניח בשלילה כי v_1, v_2, v_3 ת״ל אז ניתן להשמיט את אחד הוקטורים ולקבל קבוצה בת״ל בגודל קטן או שווה ל-2, זו סתירה.

<u>תזכורת:</u> חיתוך של תתי מרחב הוא תת מרחב.
<u>דוגמא:</u> נניח כי $W = sp(v_1,..., v_m)$ $U = sp(u_1,.., u_k)$ אז

$$U \cap W = \{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \mid \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \in W\} = \{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i \mid \sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \sum_{i=1}^{k} x_i v_i \; has\ a\ solution\}$$

<u>דיון:</u> איך מוצאים תת מרחב קטן ביותר שמכיל תתי מרחבים.

<u>הגדרה:</u> סכום של תתי מרחבים.
<u>דוגמא:</u>
- sp(1,1)+sp(1,0)=R^2.
- $\{A \mid A = A^t\} + sp(I) = \{A \mid A = A^t\}$.

<u>חוקי סכום וחיתוך:</u>

<u>משפט:</u> $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים כך ש- $U = sp(u_1,..., u_n),\ W = sp(w_1,..., w_m)$ אזי $U + W = sp(u_1,..., u_n, w_1,..., w_m)$.

<u>מסקנה:</u> $U + W$ התמ״ו הקטן ביותר שמוכל ב-V ומכיל את U, W.

הערה: אם $u_1,..., u_n$ בסיס של U ו- $w_1,..., w_m$ בסיס של W לא בהכרח ש- $u_1,..., u_n, w_1,..., w_m$ בסיס U+W , כל שניתן לדעת הוא שהם פורשים.

משפט: אם $U \cap W = \{0\}$ אז לכל $\{u_1,..., u_n\}$ בסיס של U ו- $\{w_1,..., w_m\}$ בסיס של W מתקיים כי $\{u_1,..., u_n, w_1,..., w_n\}$ בסיס של $U + W$.

הגדרה: סכום ישר.

משפט האיפיון של סכום ישר:
הבאים שקולים עבור תתי מרחבים U,W.
(1) U+W הוא סכום ישר.
(2) לכל $\{u_1,..., u_n\}$ בסיס של U ו- $\{w_1,..., w_m\}$ בסיס של W מתקיים כי $\{u_1,..., u_n, w_1,..., w_n\}$ בסיס של $U + W$.
(3) לכל וקטור $v \in U + W$ יש הצגה יחידה כסכום $v = u + w$ באשר $u \in U, w \in W$.

הוכחה:
(1) גורר (2): זה המשפט הקודם.
(2) גורר (3): קיום ההצגה נובע ישירות והגדרת $U + W$. נניח כי $u + w = v = u' + w'$ וניקח בסיסים $\{u_1,..., u_n\}$ בסיס של U ו- $\{w_1,..., w_m\}$ בסיס של W. לפי (2), $\{u_1,..., u_n, w_1,..., w_n\}$ בסיס של $U + W$. אילו $u \neq u'$, בהכרח נובע כי $w \neq w'$ נרשום אותם כצירופים לינארים

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \quad u' = \sum_{i=1}^{n} a'_i u_i, \quad w = \sum_{i=1}^{m} b_i w_i, \quad w' = \sum_{i=1}^{m} b'_i w_i$$

אז היינו מקבלים שתי פתרונות שונים ל- v כצירוף לינארי של $\{u_1,..., u_n, w_1,..., w_n\}$, בסתירה ליחידות ההצגה באמצעות בסיס.
(3) גורר (1): צ״ל כי $U \cap W = \{0\}$. יהי $x \in U \cap W$, נוכיח כי $x = 0$. כיוון ש- $0, x \in U \cap W$ אז $0 + x = x + 0$ הם שתי הצגות של איבר ב- $U + W$, ומיחידות ההצגה, $x = 0 \wedge 0 = x$. כדרוש.

דוגמא: נתבונן בקבוצת הפונקציות R^R ונתבונן בשני תתי מרחב שלה:

$$U = \{f \mid \forall x\, f(x) = f(-x)\}$$
$$W = \{f \mid \forall x\, f(-x) = -f(x)\}$$

(בדקו כי הלו תתי מרחב) אז כל פונקציה f ניתן להציג כסכום של שתי פונקציות:
נגדיר $f\_(x) = f(-x)$ ואז $f = \frac{f+f\_}{2} + \frac{f-f\_}{2}$ נשים לב כי $\frac{f-f\_}{2} \in W$, $\frac{f+f\_}{2} \in U$.
יתר על כן, אם $f \in U \cap W$ אז $f(x) = f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in R.$ ולכן $f(x) = 0$ כלומר f היא פונקציית האפס אז
לפי משפט האיפיון ההצגה הזו של f היא יחידה ומתקיים:

$$R^R = U \oplus W$$

משפט המימד הראשון:

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

מקרה פרטי הוא כאשר $U + W$ סכום ישר:

$$dim(U \oplus W) = dim(U) + dim(W)$$

הוכחה(טריק חשוב):

יהי $v_1,..., v_k$ בסיס של $U \cap W$ (ובפרט $dim(U \cap W) = k$)

מצד אחד, נשלים אותו לבסיס של U ע״י $u_{k+1},..., u_n$ (ובפרט $dim(U) = n$)

מצד שני נשלים אותו לבסיס של W ע״י $w_{k+1},..., w_m$ (ובפרט $dim(W) = m$)

נוכיח כי $v_1,..., v_k, u_{k+1},..., u_n, w_{k+1},...., w_m$ בסיס של $U + W$ ומכך נקבל כי

$$dim(U + W) = k + (n - k) + (m - k) = m + n - k = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

מכיוון ו- $U = sp(v_1,..., v_k, u_{k+1},..., u_n), \quad W = sp(v_1,..., v_k, w_{k+1},..., w_m)$ לפי המפשט שראינו

$U + W = sp(v_1,..., v_k, u_{k+1},..., u_n, w_{k+1},...., w_m)$. נותר להוכיח כי הסדרה בת״ל.

יהיו $\alpha_1,..., \alpha_k, \beta_{k+1},..., \beta_n, \gamma_{k+1},..., \gamma_m$ כך ש-

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j u_j + \sum_{r=k+1}^{m} \gamma_r w_r = 0$$

נסמן $w = \sum_{r=k+1}^{m} \gamma_r w_r$ אז $w \in W$ (כצירוף לינארי של איברים ב-W) ומצד שני

$w =- \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j u_j$ אזי w הוא צירוף לינארי גם של איברים מתוך U ולכן $w \in U$.

אבל $U \cap W = \{0\}$ אז $w = 0$. אם כך $\sum_{r=k+1}^{m} \gamma_r w_r = 0$, ומכיוון ו-w_r-ים בת״ל אז $\gamma_r = 0$.

בנוסף $- \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j u_j = 0$ ומכיוון ו- $v_1,...., v_k, u_{k+1},..., u_n$ בסיס של U נובע כי $\alpha_i, \beta_j = 0$.

<u>הגדרה:(סכום ישר של n תתי מרחבים)</u>

1. סכום של n תתי מרחבים.

<u>משפט:</u> (איפיון סכום ישר ל-n תתי מרחבים)

יהיו $U_1,..., U_n \subseteq V$. הבאים שקולים:

1. לכל i, $U_i \cap (U_1 +... + U_{i-1} + U_{i+1} +... + U_n) = \{0\}$.
2. אם $B_i \in (U_i)^{dim(U_i)}$ בסיסים אז $B_1 \sim B_2 \sim .... \sim B_n$ בסיס של $U_1 +... + U_n$.
3. לכל $x \in U_1 +.... + U_n$ יש הצגה יחידה $x = u_1 +... + u_n$ באשר $u_i \in U_i$.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח את השקילות באינדוקציה על n. עבור n=2 זה המשפט הקודם. נניח נכון ל-n ונוכיח ל-n+1.

יהיו $U_1,..., U_n, U_{n+1}$ תתי מרחבים. אז השקילות נכונה ל- $U_1,..., U_n$.

(1) גורר (2): נסמן ב- $U = U_1 +.... + U_n$. לפי ההנחה, $U \cap U_{n+1} = \{0\}$ לפי הנחת האינדוקציה

$B = B_1 \sim B_2 \sim .... \sim B_n$ בסיס של $U_1 +... + U_n$ ולפי המשפט ל-n=2, $B \sim B_{n+1}$ בסיס.

(2) גורר (3): לפי הנחת האינדוקציה, לכל $x \in U_1 +....+ U_n$ יש הצגה יחידה. שוב לפי המשפט כש-$n=2$ נובע כי יש הצגה יחידה כ- $u + u_{n+1}$ באשר $u \in U,\ u_{n+1} \in U_{n+1}$. לכן יש הצגה יחידה כמו שרשום ב-(3)

(3) גורר (1): יהי $x \in U_i \cap (U_1 +...+ U_{i-1} + U_{i+1} +...+ U_{n+1})$ אז אפשר לרשום $x = 0 + 0 +...+ 0 + x + 0 +...+ 0$ וגם $x = u_1 +...+ u_{i-1} + u_{i+1} +...+ u_{n+1} = u_1 +...+ u_{i-1} + 0 + u_{i+1} +...+ u_n$ מיחידות ההצגה נובע כי $x = 0$.

<u>תרגילים:</u>

נניח כי $U, W \subseteq V$ כך ש- $dim(U) = dim(W) = dim(V) - 1$. בנוסף נתון כי $U \neq W$.

א. הוכיחו כי $U + W = V$.

ב. נניח כי $dim(V) = 4$ וכי $T, S \subseteq V$ קבוצות בת״ל כך ש- $|T| = |S| = 3$. בנוסף נתון כי $sp(S) \neq sp(T)$.
הוכיחו כי קיים וקטור $v \in V$ אשר משלים גם את S וגם את T לבסיס של V.

נניח ש־ U,V ו־ W הם 3 תת־ מרחבים של $\mathbb{R}^n$. הראו ש:

$$(U \cap V) + (U \cap W) \subset U \cap (V + W)$$

האם הקבוצות בשני צידי יחס ההכלה הן תת מרחבים של $\mathbb{R}^n$?
האם $(U \cap V) + (U \cap W)$ תת־ מרחב של $U \cap (V + W)$?