שיעור 11- מרחבי מטריצות ואלגוריתמים.

תזכורת: הבעיה מרחבים כלליים היא שאין לנו את הכלי של ״לשים במטריצה״. יש דרך להתגבר על זה: נמצא דרך לזהות בין מרחב כללי למרחב ח-יות.

הגדרה: קואורדינטות לפי בסיס.

דוגמא: חישוב קואורדינטות של פולינום.

טענה:

1. קואורדינטות של וקטור הם 0 אמ״ם הוקטור 0.
2. קואורדינטות של איברי הבסיס.
3. קואורדינטות לפי בסיס סטנדרטי.
4. ב-F^n אם B בסיס כלשהו ו-A מטריצה שעמודותיה הן B אז $\forall x \in F^n.\ A[x]_B = x$

הגדרה: העתקת הקואורדינטות מסומנת Q_B.

טענה: העתקת הקואורדינטות היא לינארית והפיכה.

הגדרה: איזומורפיזם של מרחבים וקטורים.

משפט: יהי $f: V \to U$ איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים. אזי:

1. לכל $(\overline{v_1},...., \overline{v_n}) \in V^n$ ולכל $\overline{u} \in V$ מתקיים $Sols(\overline{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{v_i}) = Sols(f(\overline{u}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\overline{v_i}))$
2. $LD(\overline{v_1},...., \overline{v_n}) = LD(f(\overline{v_1}),...., f(\overline{v_n}))$,$sp(\overline{v_1},...., \overline{v_n}) = sp(f(\overline{v_1}),...., f(\overline{v_n}))$
3. $(\overline{v_1},...., \overline{v_n})$ בתל $\leftrightarrow$ $(f(\overline{v_1}),...., f(\overline{v_n}))$ בתל , $(\overline{v_1},...., \overline{v_n})$ פורשת $\leftrightarrow$ $(f(\overline{v_1}),...., f(\overline{v_n}))$ פורשת .
4. $(\overline{v_1},...., \overline{v_n})$ בסיס $\leftrightarrow$ $(f(\overline{v_1}),...., f(\overline{v_n}))$ בסיס ולכן $dim(V) = dim(U)$.
5. $V_1 \subseteq V$ תמ״ו אמ״ם $f[V_1] \subseteq U$ תמ״ו.
6. ועוד....

מסקנה: המשפט הקודם תקף לגבי Q_B.

מסקנה: אפשר לתרגם את הדיון במרחבים כלליים ל- F^n.

יש המון אלגוריתמים שקשורים למטריצות, הנה עוד כמה:

הגדרה: מרחב העמודות, מרחב השורות, מרחב הפתרונות.

משמעות: מרחב העמודות זה כל האלה שיש פתרון. מרחב הפתרונות ברור. מה המשמעות של מרחב השורות? בהמשך נגלה.

תרגיל: $R(AB) \subseteq R(B)$ $\quad C(AB) \subseteq C(A)$.

הוכחה:

המשפט לגבי עמודות נובע ישירות והמשפט לגבי שורות נובע מטרנספוז.

נסמן ב- $R_1(AB),..., R_n(AB)$ את שורות AB וב- $R_1(B),..., R_k(B)$ את שורות B. נוכיח כי $R(AB) = sp(R_1(AB),..., R_n(AB)) \subseteq sp(R_1(B),..., R_k(B)) = R(B)$. אכן, מהגדרת הכפל נובע כי $R_1(AB) = a_{11}R_1(B) + a_{12}R_2(B) +... a_{1k}R_k(B) \in R(B)$ ובאופן כללי

$$R_i(AB) = a_{i1}R_1(B) +... a_{ik}R_k(B) \in sp(R_1(B),..., R_k(B))$$

משפט: לכל מטריצה A, מתקיים $dim(C(A)) = dim(R(A))$.

הוכחה:

מספיק להוכיח כי $dim(R(A)) \leq dim(C(A))$ לכל מטריצה A. שכן אם הוכחנו זאת, אז

$$dim(C(A)) = dim(R(A^t)) \leq dim(C(A^t)) = dim(R(A))$$

ולכן $dim(C(A)) = dim(R(A))$, כדרוש.

נתמקד בהוכחת $dim(R(A)) \leq dim(C(A))$, נניח כי $A \in M_{n\times m}(F)$ נסמן ב- $k = dim(C(A))$. ויהי $v_1,.., v_k \in C(A) \subseteq F^n$ בסיס. (ניתן היה לדלל לבסיס) נגדיר מטריצות:

$$B = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_k \\ | & | & & | \end{pmatrix} \in M_{n\times k}(\mathbb{F})$$

$$C = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ [R_1(A))]_B & [R_2(A))]_B & \dots & [R_m(A))]_B \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \in M_{k\times m}(\mathbb{F})$$

באשר $R_1,..., A_m$ הן העמודות של A. מתקיים כי לכל $1 \leq i \leq m$:

$$B \cdot [A_i]_B = A_i$$

ולכן

$$BC = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ B\cdot[R_1(A)]_B & B\cdot[R_2(A)]_B & \dots & B\cdot[R_m(A)]_B \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ R_1(A) & R_2(A) & \dots & R_m(A) \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

ולכן $A = BC$

לפי התרגיל $R(A) \subseteq R(C)$ ולכן $dim(R(A)) \leq dim(R(C)) \leq k = dim(C(A))$, כדרוש.

הגדרה: דרגה של מטריצה. אפסות של מטריצה.

מסקנה: תוספת למשפט ההפיכות- מטריצה היא הפיכה אמ״ם הדרגה שלה היא n אמ״ם האפסות שלה היא 0.

חוקי rank:

- $Rank(A) \leq min(m, n)$
- $Rank(AB) \leq min(Rank(B), Rank(A))$
- $Rank(A + B) \leq Rank(A) + Rank(B)$

- אם A הפיכה אז $Rank(AB) = Rank(B)$

הוכחה:

1. אכן $R(A) \subseteq F^n$ $C(A) \subseteq F^m$ ולכן $n = dim(F^n) \geq dim(R(A)) = dim(C(A)) \leq dim(F^m) = m$.
2. $C(AB) \subseteq C(A)$(לפי התרגיל) ולכן $Rank(AB) \leq Rank(A)$ וגם $R(AB) \subseteq R(B)$ ולכן $Rank(AB) \leq Rank(B)$.
3. $C(A + B) \subseteq C(A) + C(B)$ ואז משפט המימדים.
4. בודאי ש- $Rank(AB) \leq Rank(B)$ בנוסף, $B = A^{-1}AB$ ולכן $Rank(B) \leq Rank(AB)$.

<u>משפט:</u> (המשפט היסודי של הדירוג)

בדירוג נשמר: מרחב השורות, מרחב הפתרונות ודרגת המטריצה אפסות המטריצה ותלויות לינאריות בין העמודות.

בדירוג לא נשמר: מרחב העמודות, הדטרמיננטה ועוד.

<u>הוכחה לגבי מרחב השורות-</u> ניתן להציג $B = EA$ באשר E הפיכה (מכפלה של אלמנטריות) מתקיים כי $R(B) \subseteq R(A)$ לפי התרגיל שראינו וכי $Rank(B) = dim(R(B)) = Rank(A) = Rank(R(A))$(הכפלה במטריצה הפיכה לא משנה את הדרגה).

<u>מסקנה לגבי שורות:</u> תהא A מטריצה מדורגת. השורות שאינן שורות 0 מהוות בסיס למרחב השורות.

וזה נותן **<u>אלגוריתם למציאת בסיס לספאן (לא דילול):</u>**

"למציאת בסיס של המרחב הנפרש מדרגים את המטריצה ולוקחים את השורות שלא התאפסו בסוף הדירוג."

הוכחה:

ראינו בעבר כי השורות אחרי הדירוג בת"ל ולכן בסיס למרחב השורות של המטריצה המדורגת ולפי המשפט היסודי של הדירוג זה אותו מרחב כמו מרב השורות של המטריצה המקורית.

<u>תרגיל:</u> תהא B מטריצה מדורגת קנונית, נסמן ב- $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq m$ את העמודות ב-B שנפתחה בהן מדרגה. אזי, $R_{i_j}(B) = e_j$.

<u>מסקנה לגבי עמודות:</u> תהא A מטריצה כלשהי ו-B הצורה הקנונית שלה.

1. בעמודה ה-i של B אין איבר פותח אמ"ם העמודה ה-i של A היא צירוף לינארי של העמודות שקדמו להן שנפתחה בהן מדרגה לאחר הדירוג.
2. לכל מטריצה קיימת ויחידה מטריצה מדורגת קנונית אשר שקולת שורות אליה.

הוכחת 1:

$LD(R_1(A),..., R_m(A)) = LD(R_1(B),..., R_m(B))$.

לכן מספיק להוכיח את השקילות לגבי העמודות של B.

באינדוקציה על העמודה של B. נוכיח כי $sp(C_1(B),..., C_i(B)) = sp(e_1,..., e_k)$ באשר $i_k \leq i < i_{k+1}$.

עבור $i = 1$ זה ברור. נניח יכ הטענה נכונה עבור i-1 ונוכיח עבור i.

אם העמודה ה-i בעלת איבר פותח אז לפי התרגיל $C_i(B) = e_j$
ולפי הנחת האינדוקציה $sp(C_1(B),..., C_{i-1}(B)) = sp(e_1,..., e_{j-1})$ ואז ברור.
ובנוסף $C_i(B) \notin sp(C_1(B),..., C_{i-1}(B))$.
אם בעמודה ה-i אין איבר פותח ונניח כי $i_k < i$ היא העמודה האחרונה שבה נפתחה מדרגה, אז
לפי הנחת האינדוקציה $sp(C_1(B),..., C_{i-1}(B)) = sp(e_1,..., e_k)$. מכיוון ולא נפתחה מדרגה ב-$C_i(B)$ אז
לכל $j \geq k + 1$ מתקיים $(C_i(B))_j = 0$. ולכן $C_i(B) \in sp(e_1,..., e_k) = sp(C_1(B),..., C_{i-1}(B))$.

לגבי נכונות האלגוריתם- ברור כי סדרת העמודות שבהן לא נפתחה מדרגה היא בת״ל (כי המתאימות ב-B הן בת״ל) ולכן מספיק להוכיח כי היא פורשת-.

הוכחת 2:
באינדוקציה על מספר העמודות. עבור n=1:
או שהתחלנו עם מטריצת ה-0 ואז ברור, או שיש רכיב שאינו 0 ואז נקבל את e_1.
נניח כי יש יחידות ל-n ונוכיח ל-n+1.
נדרג את A לצורת מדרגות קנונית $A = (A'|a) \rightarrow (B'|b)$ אז B' נקבעת ביחידות לפי הנחת האינדוקציה. נניח בשלילה כי $(B'|v')$ צורה מדורגת קנונית נוספת של A . בהכרח העמודה האחרונה של A היא צירוף לינארי של הקודמות, אחרת, לפי 1, יש ב-v ו-v' איבר פותח ולכן $v' = e_j$ $v = e_i$. נשים לב כי בהכרח i=j שכן :

$$i = |\{k < n \mid C_k(A) \notin sp(C_1(A),..., C_{k-1}(A))\}| = j$$

ולכן $v = v'$, סתירה.
אם כך, $A_{n+1} = x_1A_1 +... x_nA_n$ ולפי המשפט היסודי של הדירוג $v = x_1B_1 +... x_nB_n = v'$ כדרוש.

<u>מסקנה אלגוריתם לדילול סדרה פורשת לבסיס:</u>
״שמים בעמודות, מדרגים, ולוקחים את העמודות במטריצה המקורית שלא נפתחה בהן מדרגה״ $C_{i_1}(A),..., C_{i_k}(A)$
בסיס ל-$C(A)$ באשר $1 \leq i_1 <...< i_k \leq n$ העמודות שנפתחה בהן מדרגה.

<u>הוכחה:</u> פורשת- באינדוקציה על העמודות, נוכיח כי אם $i_k \leq i < i_{k+1}$ אז
$sp(C_1(A),.., C_i(A)) = sp(C_{i_1}(A),..., C_{i_k}(A))$. אם $i = i_k$ אז לפי הנחת האינדוקציה
$sp(1,.., i-1) = sp(i_1,..., i_{k-1})$ ואז
$sp(1,..., i) = sp(1,.., i-1) \oplus sp(i) = sp(i_1,..., i_{k-1}) \oplus sp(i) = sp(i_1,..., i_k)$.
אם $i_k < i$ אז לפי 1$C_i(A) \in sp(C_1(A),..., C_{i-1}(A))$ ולכן
$sp(C_1(A),..., C_i(A)) = sp(C_1(A),..., C_{i-1}(A)) = sp(C_{i_1}(A),..., C_{i_k}(A))$
בת״ל- לפי 1 שוב, אף אחד מבין $C_{i_j}(A)$ אינו צירוף לינארי של הקודמים וזה שקול לכך שהסדרה בת״ל.

<u>מסקנה: אלגוריתמים להשלמה לבסיס</u>(כל סדרה בת״ל ניתן להשלים לבסיס):
״שמים בעמודות ומצרפים בסוף את וקטורי היחידה (או סדרה פורשמת כלשהי) ומגיעים לצורת מדרגות, מוסיפים את הוקטורים מהסדרה הפורשת שמתאימים לעמודות שנפתחה בהן מדרגה״

__הוכחה:__ נסמן $(v_1,..., v_k)$ את הסדרה הבת״ל וב-$(u_1,..., u_m)$ את הסדרה הפורשת. נסמן ב-A את המטריצה שעמודותיה הן $(v_1,..., v_k, u_1,..., u_m)$. ברור כי $C(A) = F^n$ (כי מכיל סדרה פורשת). לפי המסקנה הקודמת, נסמן את העמודות שנפתחה בהן מדרגה ב- $C_{i_1}(A),..., C_{i_j}(A)$, אז הם מהוות בסיס של F^n. בהכרת שאחרי הדירוג בעמודות 1,...k נפתחה מדרגה, אחרת, יש וקטור שהוא צירוף של קודמיו לפי המסקנה לגבי עמודות וזה סותר את היות הסדרה בת״ל.

__בתרגיל בית__ אלגוריתם נוסף- ״שמים בשורות, מדרגים (אם הסדרה בת״ל בעלת k וקטורים, אז אף שורה לא התאפסה שכן מרחב השורות נשמר ואז מימדו היה קטן המספר השורות והדרגה היא k), כעת מוסיפים וקטור יחידה e_j כנגד כל עמודה j שלא נפתחה בה מדרגה, לפי משפט הדרגה והאפסות הוספנו n-k וקטורים״

כדי לראות כי קיבלנו בסיס בצירוף עם הוקטורים המקוריים, נשים את כל הוקטורים כשורות מטריצה לפי הסדר, נדרג מהתחלה בלי לגעת בחלק התחתון (של וקטורי היחידה), נגיע לצורה המדורגת כמו קודם ואז נאפס את שאר העמודות באמצעות הוקטורים החדשים שהוספנו, כעת קיבלנו מטריצת שבכל שורה שלה יש בדיוק 1 אחד ובכל עמודה שלה יש בדיוק אחד 1 ולכן זה מטריצת פרמוטציה אז היא הפיכה ובפרט $sp(R(A)) = F^n$. מכיוון שדירוג משמר את מרחב העמודות הsp של הסדרה החדשה הוא כל המרחב ולכן פורשת. אם כך, מדובר בסדרה של n וקטורים שהיא פורשת ולפי 2 מתוך 3 היא בסיס.

אזהרה מפני אלגוריתם לא נכון!

__מסקנה:__ יהיו $A, B \in M_r(F)$ מטריצות ו-A', B' הצורות הקנוניות שלהן. הבאים שקולים:

1. A,B הן שקולות שורה.
2. $A' = B'$.
3. $R(A) = R(B)$.

__הוכחה:__ את השקילות של 1,2 מקבלים מהמשפט הקודם.
2 גורר 3 נובע מכך שדירוג משמר את מרחב השורות. לבסוף, נניח כי $R(A) = R(B)$ אז $R(A') = R(B')$ ולכן $r = dim(R(A')) = dim(R(B'))$. מכיוון ו-A',B' בצורה קנונית, בדיוק השורות $R_1(A'),..., R_r(A'), R_1(B'),...., R_r(B')$ לא 0 והם מהווים בסיס למרחב. נסמן ב-A'', B'' את המטריצות שמתקבלות מ-A,B ע"י מחיקות שורות ה-0. לכל $1 \le i \le r$, $R_i(B') \in sp(R_1(A'),...., R_r(A'))$

כמו קודם, נסמן $C \in M_r(F)$ את המטריצה $R_i(C) = [R_i(B')]^t_{(R_1(A'),...,R_r(A'))}$ ומתקיים:

$B' = CA'$. כיוון ושורות B גם בסיס של מרחב השורות, אז שורות C בסיס ולכן C הפיכה (נימוק אחר:
$r = Rank(B') = Rank(CA') \le Rank(C) \le r$ ולכן $Rank(C) = r$ אז C הפיכה).
אז C היא מכפלת מטריצות אלמנטריות ולכן B' שקולת שורה ל-A'. ולכן B שקולת שורות ל-A.

דוגמא: דוגמא לחישוב דרגה ואפסות.

משפט הדרגה-אפסות: תהא מטריצה $A \in M_{m\times n}(F)$ אזי $Rank(A) + N(A) = n$.

הוכחה: נדרג את A לצורת מדרגות קנונית. לפי המשפט היסודי של הדירוג, גם הדרגה וגם אפסות המטריצה נשמרו. אז מספיק להוכיח את המשפט עבור מטריצות מדורגות קנונית. ואז המשפט נובע באופן ישיר מהטענות שראינו שכן, כל n העמודות מתחלקות ל-2. כאלה שנפתחה בהן מדרגה (ואז הן תורמות 1 למימד של מרחב העמודות, כלומר למימד) או שלא נפתחה בהן מדרגה (ואז הן תורמות 1 למימד של מרחב הפתרונות-האפסות)
פורמלית: נובע מתכונות של כפל מטריצה ב-ח-יה. ניקח בסיס של $Sols(A)$, $x_1,..., x_k$, אז $N(A) = k$. נשלים אותו לבסיס של F^n ע״י $x_{k+1},..., x_n$.

נוכיח כי $Ax_{k+1},..., Ax_n \in C(A)$ בסיס של $C(A)$ ולכן $Rank(A) = dim(C(A)) = n - k = n - N(A)$:

פרישה: יהי $b \in C(A)$ אז יש x כך ש- $b = Ax$. אז $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ ולכן $b = Ax = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Ax_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i Ax_i$.

בת״ל: נניח כי $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i Ax_i = 0$ אז $A(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i x_i) = 0$ ואז $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i x_i \in Sols(A)$ ולכן קיימים מקדמים כך ש- $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$ אבל זה בסיס לכן $\alpha_{k+1}..., \alpha_n = 0$.

מסקנה לגבי האפסות:
מספר העמודות שלא נפתחה בהן מדרגה= אפסות המטריצה.

הוכחה: אינטואיטיבית, כל שורה שלא נפתחה בה מדרגה תורם פרמטר אחד ולכן וקטור נוסף לבסיס של מרחב הפתרונות.
פורמלית- מסקנה ישירה ממשפט הדרגה והאפסות.

<u>**תרגול:**</u> מציאת מרחב משלים של מרחב פולינומים שמתאפסים בנקודה מסוימת (נקודות מסוימות) ע״י קואורדינטות והשלמה לבסיס והשלמה של וקטור לתת מרחב מסובך (עבודה עם קואורדינטות או עבודה עם בסיס של תת מרחב).

תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה כך ש-$\text{rank}(A) = r$. הוכיחו:

(א) קיימות מטריצות $A_1, A_2, ..., A_r \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-$A = \sum_{i=1}^{r} A_i$ ומתקיים $\forall 1 \le i \le r$: $\text{rank}(A_i) = 1$.

(ב) הוכיחו **שלא קיימות** מטריצות $A_1, A_2, ..., A_{r-1} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ כך ש-$A = \sum_{i=1}^{r-1} A_i$ ומתקיים $\forall 1 \le i \le r-1 : \text{rank}(A_i) = 1$.