<u>שיעור 15- מרחב העתקות, איזומורפיזם של אלגבראות, חפיפה ודימיון מטריצות</u>

תזכורת:

מטריצת שינוי קוארדינטות: ${[id]^{B}}_{C}$, ומה שהיא עושה זה בדיוק לשנות קוארדינטות:

$${[id]^{B}}_{C}[v]_{B} = [v]_{C}$$

חישוב שלה זה כמו מטריצה מייצגת (תמיד הפיכה, לרשום נוסחה, דיון על הבסיס הסטנדרטי, דוגמא).

דוגמה 6.37: יהי $V = \mathbb{R}^2$, ותהי P מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ לבסיס $\mathcal{B}' = \left(v_1' = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right)$ שמתקבל מ-$\mathcal{B}$ על ידי הסיבוב בזוית θ. אז מטריצת המעבר מ-$\mathcal{B}$ ל-$\mathcal{B}'$ היא $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. יהי v וקטור בעל קואורדינטות x', y' לפי $\mathcal{B}'$. אז

$$.v = [v]_{\mathcal{B}} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{pmatrix}.$$

ההופכית של מטריצת שינוי הקואורדינטות- הוכחה באמצעות נוסחה 4.

נוסחה 5: ${[T]^{B'}}_{C'} = {[id]^{C}}_{C'}{[T]^{B}}_{C}{[id]^{B'}}_{C'}$ דוגמא של שינוי בסיס של מטריצה מייצגת.

דוגמה 6.39: יהי $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ השיקוף ביחס לציר דרך הראשית שעובר דרך v_1' מהדוגמה הקודמת. אז

$$T(v_1') = v_1', \quad T(v_2') = -v_2'$$

ולכן $[T]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

יהיו $\mathcal{A} = \mathcal{B}, \mathcal{A}' = \mathcal{B}'$.

אז $P = Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. מכאן $P^{-1} = Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. לכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [T]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}P$$

ולכן

$$\begin{aligned}[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} =& P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

מכאן נובע

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= [T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

טענה/תרגיל: נניח כי C בסיס של V ונתונה מטריצה הפיכה M מהמימדים המתאימים, אז יש בסיס D של V כך ש- $M = [id]^{C}_{D}$. ויש בסיס 'D של V כך ש- $M = [id]^{D'}_{C}$.

הוכחה: נגדיר $D' = CM$ ואם אם רושמים כצירוף לינארי מקבלים את הדרוש עבור החלק השני (עד כדי לקיחת קואורדינטות)

עבור החלק הראשון, נשתמש בחלק השני עם ההופכית של M כדי למצוא בסיס 'D ואז נהפוך את שני הצדדים.

הנוסחה הקודמת נותנת מוטיבציה להגדרה הבאה:

הגדרה של התאמת מטריצות:

1. שתי מטריצות A, B נקראות מתאימות אם יש מטריצות הפיכות P, Q כך ש-
$A = PBQ$
2. שתי מטריצות A, B נקראות דומות אם יש מטריצה הפיכה P כך ש-
$A = PBP^{-1}$

תרגיל: אלה יחסי שקילות.

משפט:

1. הבאים שקולים:
   א. A,B מתאימות
   ב. לכל העתקה לינארית $T: V \to U$,

קיימים בסיסים C_1, C_2 כך ש- $A = [T]^{C_1}_{C_2}$ אם״ם קיימים בסיסים D_1, D_2 כך ש- $B = [T]^{D_1}_{D_2}$.
(כלומר A,B מייצגות את אותן העתקות לינאריות לפי בסיסים כלשהם)
2. הבאים שקולים
א. A,B דומות
ב. לכל העתקה לינארית $T: V \to V$,
קיים בסיס C כך ש- $A = [T]_C$ אם״ם קיים בסיס D כך ש- $B = [T]_D$.
(כלומר A,B מייצגות את אותן העתקות לינאריות לפי בסיס נתון)

הוכחת 1: נניח א, אז יש P,Q כך ש- $B = PAQ$. מספיק להוכיח גרירה בכיון אחד והכיוון השני יינבע מסימטירה בנתונים. נניח כי $A = [T]^{C_1}_{C_2}$ אז לפי התרגיל/טענה יש בסיס D_1 כך ש- $Q = [id]^{D_1}_{C_1}$ ובסיס D_2 כך ש-

$P = [id]^{C_2}_{D_2}$ ולכן

$$[T]^{D_1}_{D_2} = [id]^{C_2}_{D_2}[T]^{C_1}_{C_2}[id]^{D_1}_{C_1} = PAQ = B.$$

כעת נניח את ב, מתקיים לדוגמא כי $A = [T_A]^{st}_{st}$ ולכן קיימים בסיסים D_1, D_2 כך ש- $B = [T_A]^{D_1}_{D_2}$ נסמן $Q = [id]^{D_1}_{st}$ ו- $P = [id]^{st}_{D_2}$, Q,P הן מטריצות הפיכות כי הן מטריצות שינוי קואורדינטות. אז מתקיים $PAQ = [id]^{st}_{D_2}[T_A]^{st}_{st}[id]^{D_1}_{st} = [T_A]^{D_1}_{D_2} = B$ ולכן B, A חופפות.

הוכחת 2:
המבנה של ההוכחה זהה עם שינויים קלים, $B = Q^{-1}AQ$ נניח כי $A = [T]_C$ אז יש בסיס אחד D כך ש-
$Q = [id]^D_C$ ולכן $Q^{-1} = [id]^C_D$ ונקבל כי

$$[T]_D = [id]^C_D[T]_C[id]^D_C = Q^{-1}AQ = B.$$

נניח את ב׳, ושוב ניקח $A = [T_A]_{st}$ ואז יש בסיס C כך ש- $B = [T]_C$ אבל אז נגדיר $Q = [id]^C_{st}$ (איברי C כעמודות) ומתקיים $Q^{-1} = [id]^{st}_C$ ולכן $B = [T]_C = [id]^{st}_C[T]_{st}[id]^C_{st} = Q^{-1}AQ$.

מה נשמר תחת דמיון וחפיפה?
- דטרמיננטה(רק תחת דימיון- נובע מכפליות הדטרמיננטה בחפיפה נשמרת הפיכות)
- הדרגה
- האפסות
- העקבה (רק בדמיון- נובע מהנוסחה $tr(AB) = tr(BA)$ שהם הוכיחו כבר או יוכיחו בשיעורי הבית).

דוגמא נגדית למקרה השני.

דוגמא: אם לוקחים את מטריצת היחידה ו(1,1,0,1) אז יש להם אותה דטרמיננטה אותה הדרגה אותה האפסות ואותה העקבה אבל הן לא דומות! (הוכיחו זאת) אז הטענה הקודמת עובדת רק בכיוון אחד.

הגדרה תהא $T: V \to V$ העתקה לינארית, נגדיר $det(T) = det([T]_B)$ עבור איזשהו בסיס B.
נגדיר $tr(T) = tr([T]_B)$ ונגדיר $Rank(T) = dim(C([T]_B)) = dim(Im(T))$ ו-
$N(T) = dim(Sols([T]_B)) = dim(ker(T))$.

$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ b & 3 & -8 \\ b & 2 & -5 \end{pmatrix}$ מטריצה ממשית מסדר 3.

האם קיימים $a,b \in \mathbb{R}$ כך ש- A דומה למטריצה $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 0 & 7 & -17 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$? נמקו.

(שינוי של b=0)

תרגיל: למצוא בסיס בו המטריצה המייצגת היא אלכסונית. ותרגיל של הוכחה כי אין כזה בסיס.

הגדרה: אלגברה מעל שדה (מרחב וקטורי שיש גם כפל אסוצייטיבי בין האיברים עם איבר יחידה ומקיים חוק הפילוג) שלוש דוגמאות מרכזיות- מטריצות ריבועיות, העתקות ממרחב לעצמו, ומרחב הפולינומים.

משפט: יהי V, U מרחבים וקטורים מעל אותו שדה F, ונניח כי $dim(V) = n, dim(U) = m$ אזי
$$Hom(V, U) \simeq M_{n\times m}(F)$$
אם $V = U$ אז האיזומורפיזם הוא של אלגבראות:
$$Hom(V, V) \simeq M_n(F)$$
כאשר הכפל ב- $Hom(V, V)$ הוא הרכבה של פונקציות. והכפל ב- $M_n(F)$ הוא כפל מטריצות.
$([S \circ T]^B_D = [S]^C_D \cdot [T]^B_C)$
ע״י איזומורפיזם של אלגבראות.

הוכחה: שיקולי מימד זה ברור. האיזומורפיזם הוא לקבוע שני בסיסים B, C ולהגדיר
$$T_{B,C}: Hom(V, U) \to M_{n\times m}(F)$$
ע״י $T_{B,C}(S) = [S]^B_C$, בתרגיל בית הם יוכיחו כי זו העתקה לינארית, נוכיח חח״ע:
נניח כי $[T]^B_C = 0$ וצ״ל כי $T = 0$ מנוסחה 1, מתקיים כי לכל v, $[T(v)]_C = [T]^B_C[v]_B = 0 \cdot [v]_B = 0$ ולכן $T(v) = 0$. מחח״ע ושיוויון מימדים נובע כי זה איזומורפיזם.