המרחב הדואלי פעולת הטרנספוז ומרחב השורות

הגדרה: מכפלה סקלרית (תזכורת- מכפלת מטריצות)
תיאור של כפל מטריצות באמצעות מכפלה פנימית.

דיון: במערכת המשוואות Ri מתאים למשוואה ה-i. כשם שמערכת משוואות לינארית מורכבת ממשוואות (אובייקט מורכב מורכב מאובייקטים פשוטים יותר) כך גם מטריצה מוגדרת באמצעות שורות וההעתקה המטריציונית מורכבת מהעתקות פשוטות יותר $x \to R_i \cdot x$.

הגדרה: פונקציונל לינארי ב- R^m זה פונקציה לינארית $f: R^m \to R$. מרחב הפונקציונלים הלינאריים שנקרא גם המרחב הדואלי, מסומן $(R^m)^* = L(R^m, R)$.

דוגמא: פונקציונל ה-0, הפונקציונלים $T_x(y) = x^t \cdot y$.

משפט: כל פונקציונל $f \in (R^m)^*$ הוא מהצורה $f = T_x$.
הוכחה: ראינו כבר את הקשר היותר כללי לגבי העתקות לינאריות ומטריציוניות.

דיון: אם נזהה פונקציונלי לינארי T_x עם x^t, אז העתקה $(\ )^t: R^m \to (R^m)^*$ (*) היא איזומורפיזם. כלומר הפעולה של t מחזירה מוקטור פונקציונל לינארי ומבחינתינו יהיה נכון לחשוב על וקטור "שוכב" כפונקציונל ולא כ- m-יה. והפוך, הפעולה של טרנספוז הופכת פונקציונלי לינארי לוקטור עומד כלומר m-יה.

הגדרה: עבור $A \in M_{m\times n}(F)$, מרחב השורות $R(A) \subseteq (R^m)^*$ המוגדר ע"י $R(A) = sp(R_1,..., R_n)$. זהו מרחב של פונקציונלים. (כרגע לא מעניין, נראה את הקשר בהמשך)

דיון: אם חושבים על $A \in M_{mxn}(F)$ כהעתקה לינארית, מה המשמעות של A^t כהעתקה לינארית ? מה המשמעות של הכפל $A^t x$ עבור וקטור $x \in F^m$? אפשר לשכוח שהגיעה מ-A ואז לנתח כפונקציה מ- $T_{A^t}: F^m \to F^n$. אבל יהיה יותר מעניין לנתח את A^t במושגים של A. ובכדי להבין את המשמעות של $A^t x$, נעזר במשוואה:

$$A^t x = (x^t \cdot A)^t$$

x^t- פונקציונלי לינארי, הכפל $x^t \cdot A$ הרכבה של שתי פונקציות $T_x: R^m \to R$ ו- $T_A: R^n \to R^m$.
התוצאה היא $T_x \circ T_A: R^n \to R$ שזה פונקציונל לינארי ב- $(R^n)^*$. כלומר $x^t \cdot A$ הינו פונקציונלי לינארי ב-$(R^n)^*$ ו-$(x^t \cdot A)^t$ זה הייצוג הוקטורי שלו. המסקנה היא ש- A^t לוקחת את הייצוג הוקטורי x של פונקציונלי x^t ומחזירה את היצוג הוקטורי של הפונקציונלי $x^t \cdot A$.

לסיכום: פעולת הטרנספוז מעבירה וקטור לפונקציונל והעתקה לינארית להעתקה בין פונקציונלים לינארים מתאימים (אבל בכיוון השני).

מסקנה: $R(A) = C(A^t)$ (התמונה של ההעתקת הטרנספוז).

ישנה דואליות בין $Sols$ ומרחב השורות:

טענה: $R(A) = \{x \in (R^m)^* \mid \forall v \in Sols(A),\ x \cdot v = 0\}$

טענה: $Sols(A) = \{x \in R^n \mid \forall x \in R(A).\ x \cdot v = 0\}$

הוכחות: בתרגיל בית.

באופן אבסטרקטי

השפה שאנחנו מפתחים כרגע תעזור לנו בין השאר להבין מה המשמעות של מרחב השורות בהעתקה לינארית. בלי שום קשר, זו שפה מאוד נפוצה במתמטיקה ומשמשת להמון דברים אחרים.

הגדרה: יהי V מ״ו מעל F. פונקציונל לינארי של V זו העתקה לינארית $f: V \to F$.

דוגמאות: פונקציונל ה-0, מכפלה סקלרית, tr, הצבה בפולינום, הקואורדינטה ה-i לפי בסיס קבוע.

תרגיל 1: אם f לא פונקציונל ה-0 אז f על.

תרגיל 2: המימד של הגרעין של פונקציונל לינארי.

הגדרה: המרחב הדואלי מסומן $V^* = L(V, F)$ מרחב כל הפונקציונלים הלינאריים.

טענה: אם V מ״ו נוצר סופית אז $dim(V^*) = dim(V)$ ו- $V \simeq V^*$.

הערה: ללא קביעת בסיס אין לנו איזומורפיזם ״טבעי״ בין המרחבים (שמטריצה מייצגת היינו צריכים בסיס בין המרחבים) לעומת זאת, ב-F^n לדוגמא, כן היה לנו איזומורפיזם טבעי ע״י $T: R^m \to (R^m)^*$ ע״י $T\ (x)(y) = x^t y$ העתקת הטרנספוז, ניצלנו את העובדה שמוגדר כפל כזה בין m-יות (אולי נגיע למסגרת יותר כללית בסוף הקורס). המשמעות היא שבאופן כללי, אין לנו דרך טבעית לזהות וקטור ב-V עם פונקציונל לינארי כמו שהיה לנו ב-F^n, כלומר אין לנו מועמד טוב להוות הגדרה לפעולה אבסטרקטית של טרנספוז. ובכל זאת, אנחנו נראה קשר מניין אחר בהמשך.

טענה: V איזומורפי ל-V* אמ״ם V מימד סופי.

הוכחה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F שאינו נוצר סופית ויהי B בסיס של V (אינסופי) מטריתינו היא להוכיח כי V,V^* לא איזומורפיים. כפי שראינו בעבר, גם עבור מרחבים אינסופיים, אם הם איזומורפיים אז יש להם את אותו המימד. ולכן כדי להוכיח כי הם לא איזומורפיים נוכיח כי ל-V ו-V^* אין את אותו המימד:

כל $v \in V$ מתאים לתת קבוצה סופית של B וסדרה סופית של סקלרים ב- F.

מתקיים כי $|\bigcup_{n\in N} F^n| = |F|$ וגם $|\{X \subseteq B \mid X \text{ is finite}\}| = |B| = dim(V) =: d$ ולכן .
כל פיונקציונל ב- V^* נקבע באופן יחיד על איבר בסיס, ולכן $|V^*| = |F|^d$.

נסמן ב-d' את המימד של V^* אז $|V^*| = max(d', |F|)$ נוכיח כי $d' \geq |F|$ ומכאן יינבע כי (משפט קנטור) $d' = |V^*| = |F|^d > d$ אז לא איזומורפיים. מכיוון ש- V לא נוצר סופית, נוכל למצוא קבוצה$\{e_n \mid n \in N\} \subseteq V$ בת"ל. נגדיר העתקה מ-F ל- V^* שתמונתה מהווה קבוצה בת"ל. $c \to f_c$ המוגדרת $f_c(e_n) = c^n$ היא חח"ע שכן אם $f_{c_1} = f_{c_2}$ אז $c_1 = f_{c_1}(e_1) = f_{c_2}(e_2) = c_2$. ובנוסף $\{f_c \mid c \in F\}$ בת"ל.
ההוכחה: יהיו $f_{c_1},..., f_{c_n}$. נגדיר $v_i = (f_{c_i}(e_0),...., f_{c_i}(e_{n-1}))^t = (1, c_i, c_i^2,..., c_i^{n-1})^t \in F^n$.
א. מספיק להוכיח כי $(v_1,..., v_n)$ בת"ל.

ב. נבנה את המטריצה ששורותיה הן $(v_1,.., v_n)$ ונוכיח כי היא הפיכה (חישוב של מטריצת ונדרמונד
)

__דיון:__ בניגוד למצב עם וקטורים, הצלחנו לבטא A^t כהעתקה בין פונקציונלים ולכן נגדיר באופן כללי:

__הגדרה:__ תהא $T: V \to U$ העתקה לינארית. נגדיר $T^t: U^* \to V^*$ ע״י $T^t(\phi) = \phi \circ T$.
בשיעורי הבית יש תרגיל שמרחיב לגבי העתקה זו.

אם T^t מתאימה ל- A^t אז אפשר להגדיר את מרחב השורות של T!

__הגדרה:__ $R(T) = Im(T^t)$.

בלי ההנחה כי V נוצר סופית לא ניתן לומר עוד הרבה מעבר למה שאמרנו. נניח מעתה כי V נוצר סופית.

__תזכורת:__ בשביל לקבוע באופן יחיד העתקה לינארית מספיק להגדיר מה היא עושה לבסיס ובפרט כדי לקבוע באופן יחיד פונקציונל לינארי, מספיק להגדיר אותו על בסיס.

__דיון:__ תהא $T: V \to U$ העתקה לינארית, איך נגדיר את הפונקציונל הלינארי שמייצג את ה״שורה ה-i"?
במושגים של מטריצה זה היה הפונקציונל שמתאים לרכיב ה-i של תוצאת ההעתקה. (נתחיל בלהגדיר את הפונקציונל שמחזיר את הרכיב ה-i)

__הגדרה(הבסיס הדואלי):__ נקבע C בסיס של U (ובפרט U נוצר סופית). ונגדיר $\phi_i = \pi_i \circ Q_C \in U^*$ להיות הפונקציונל שלכל u מחזיר את הקואורדינטה ה-i של u. הקבוצה $C^* = \{\phi_1,..., \phi_m\}$ נקראת הבסיס הדואלי של C.

__משפט:__

1. $u = \phi_1(u)c_1 +.... \phi_m(u)c_m$.
2. $\phi_i(c_j) = \delta_{ij}$
3. C^* בסיס של U^*
4. $\phi = \phi(c_1)\phi_1 +...+ \phi(c_m)\phi_m$ כלומר $[\phi]_{C^*} = (\phi(c_1),..., \phi(c_m))$.

<u>הוכחה:</u>

1. ישירות מהגדרה.
2. ראינו עשרות פעמים.
3. וגם 4. מספיק להוכיח את 4, ואז שימוש ב-2 מתוך 3 (יודעים מה המימד של U^*) ואעם

$$\phi(u) = \phi(\sum_{i=1}^{m} \phi_i(u)c_i) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(u)\phi(c_i) = \sum_{i=1}^{m} [\phi(c_i)\phi_i](u) = [\sum_{i=1}^{m} \phi(c_i)\phi_i](u)$$

תרגיל: יהיו $V = \mathbb{R}^2$ ו-$B = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$. מיצאו את הבסיס הדואלי ל-B.

<u>דיון:</u> הפונקציונל ה-i שמגדיר את T הוא $T^t(\phi_i) = \phi_i \circ T = T_i$. (הקואורדינטה ה-i לפי הבסיס שבחרנו של הוקטור $T(v)$.

<u>מסקנה:</u> אם U נוצר סופית אז $R(T) = Sp(T_1,..., T_m)$

<u>הוכחה:</u> לפי המשפט הקודם $C^* = \{\phi_1,..., \phi_m\}$ בסיס של U^* ולכן

$R(T) = Im(T^t) = Sp(T^t(\phi_1),..., T^t(\phi_m)) = Sp(T_1,..., T_m)$.

<u>טענה:</u> אם U נוצר סופית אז $ker(T) = \bigcap_{i=1}^{m} Ker(T_i)$ (בשפה של מטריצות $Sols(A) = \bigcap_{i=1}^{m} Sols(R_i)$)

<u>הוכחה:</u> אם $v \in Ker(T)$ אז $T_i(v) = \phi_i(T(v)) = \phi_i(0) = 0$ ולכן $v \in \bigcap_{i=1}^{m} Ker(T_i)$. בכיוון השני, אם

$v \in \bigcap_{i=1}^{m} Ker(T_i)$ אז $T(v) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(T(v))c_i = 0$ ולכן $v \in Ker(T)$.

<u>מסקנה:</u> אם U נוצר סופית אז $Ker(T) = \bigcap_{f \in R(T)} Ker(f)$

<u>הוכחה:</u> מהטענה הקודמת, $ker(T) = \bigcap_{i=1}^{m} Ker(T_i) \supseteq \bigcap_{f \in R(T)} Ker(f)$. אם $T_i(v) = 0$ לכל i, יהי $f \in R(T)$

אז $f = f(c_1)T_1 +... f(c_m)T_m$ ולכן $f(v) = 0$ אז $v \in \bigcap_{f \in R(T)} Ker(f)$.

זה יוצר קשר כללי יותר בין תתי מרחבים של V לבין תתי מרחבים של V^*

הגדרה:(מרחב אפסים)

יהי $S \subseteq V^*$ <u>תת קבוצה</u> אז מרחב האפסים של S, $S_0 = \bigcap_{f \in S} ker(f)$.

תכונות:

1. T_0 תת מרחב של V
2. אם $T_1 \subseteq T_2$ אז $(T_2)_0 \subseteq (T_1)_0$
3. $(\bigcup_\alpha T_\alpha)_0 = \bigcap_\alpha (T_\alpha)_0$
4. $T_0 = (spanT)_0$.

5) $(\{0\})_0 = V$ $(V^*)_0 = \{0\}$

כלומר מצאנו הפונקציה $F: LSS(V^*) \to LSS(V)$ שמוגדרת $F(S) = S_0$

נמצא לפונקציה זו הופכית.

דיון: מה אמורה להיות הפונקציה ההופכית? בהנתן $U \in LSS(V)$, מה אמור להיות $F^{-1}(U)$?

U צריך להיות חיתוך הגרעינים של כל הפונקציונלים ב-$F^{-1}(U)$, לכן נגדיר $F^{-1}(U)$ להיות כל הפונקציונלים שמתאפסים על כל איבר של U.

הגדרה:(מרחב מאפס)

יהי $S \subseteq V$ תת קבוצה, המרחב המאפס של S מוגדר ע״י $S^0 = \{\phi \in V^* \mid \phi|_S = 0\}$

תכונות:

1. S^0 תת מרחב לינארי של V^*
2. אם $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ אז $S_2{}^0 \subseteq S_1{}^0$
3. לכל מערכת $\{S_2\}$ תת קבוצה של V מתקיים $(\bigcup_\alpha S_\alpha)^0 = \bigcap_\alpha S_\alpha{}^0$
4. $S^0 = (spanS)^0$.

5) $(V)^0 = \{0\}$ $(\{0\})^0 = V$

מסקנה: אם U נוצר סופית אז$(R(T))_0 = Ker(T)$.

דיון: ברור כי $M \subseteq (M^0)_0$ וכי $U \subseteq (U_0)^0$ (בשיעורי הבית) אבל ההכלה ביוון השני ממש לא ברורה, לדוגמא אם $v \in (M^0)_0$ זה אומר כי v מתאפס על כל פונקציונל שמתאפס על כל איבר M. מדוע זה אומר כי $v \in M$? אכן אם המרחבים לא נוצרים סופית ההכלה הזו לא בהכרח מתקיימת. אנו נצטרך לנצל כאן שיוויון מימדים.

הוכחה לדוגמא: אם $v \in M$ יהי $\phi \in M^0$ אז $\phi(v) = 0$ ולכן $v \in Ker(\phi)$.

ולכן $M \subseteq \bigcap_{\phi \in M^0} ker(\phi) = (M^0)_0$

משפט: יהי V מרחב לינארי ממד סופי, $dimV = n$, M תת מרחב של V. אזי $dimM + dimM^0 = dimV = n$.

<u>הוכחה:</u> נגדיר העתקה לינארית $T: V^* \to M^*$ של צמצום של פונקציונל על M (בתרגיל בית תוכיחו כי זו העתקה לינארית) מתקיים

$$ker(T) = \{\phi \in V^* \mid \phi|_M = 0\} = M^0$$

נוכיח כי $Im(T) = M^*$ שכן אם $v \in M^*$. יהי $x_1,..., x_k$ בסיס של M ונשלים אותו לבסיס של V ע״י $x_{k+1},..., x_n$.

נגדיר פונקציונל $u \in V^*$ ע״י $u(x_i) = v(x_i)$ על $i \le k$ ועבור $i > k$ נגדיר $v(x_i) = 0$.

אזי $u \in V^*$ ומתקיים $T(u) = u|_M = v$ שכן הם מסכימים על בסיס של M.

לפי משפט המימד

$$dim(ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V^*)$$

ולכן

$$dim(M^0) + dim(M^*) = dim(V^*)$$
$$dim(M^0) + dim(M) = dim(V)$$

<u>משפט:</u> יהי V מ״ו נ״ס ויהי $U \subseteq V^*$ אזי $dim(U) + dim(U_0) = dim(V)$

<u>הוכחה:</u> ננסה ללכת באותה הדרך, נחפש העתקה לינארית T שהגרעין שלה הוא U_0. נניח כי $f_1,..., f_k$ בסיס של U , נשלים אותו לבסיס של V^* ע״י $f_{k+1},..., f_n$. בפרט $U = sp(f_1,.., f_k)$.

$T: V \to U$ שמוגדר ע״י $T(v) = f_1(v)f_1 +.... f_k(v)f_k$. אכן $ker(T) = \{v \mid f_1(v)f_1 +.... f_k(v)f_k = 0\}$

ומאי תלות, $Ker(T) = \bigcap_{i=1}^{k} ker(f_i) = \bigcap_{f \in U} Ker(f) = U_0$.

נוכיח כי T על. ואז ממשפט המימדים יינבע כי $dim(U) + dim(U_0) = dim(V^*) = dim(V)$.

יהי $t \in U$ אז $t = a_1f_1 +... + a_kf_k$ מספיק להוכיח כי קיים $v \in V$ כך ש- $t_i(v) = a_i$.

אם $f_1,..., f_n$ היה בסיס דואלי ל- $v_1,..., v_n$ אז המצב היה ברור שכן $[t]_{B^*} = (t(v_1),..., t(v_n))$.

נגדיר $v = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ מתקיים $f_j(v) = a_j$ ואז $T(v) = T(v) = f_1(v)f_1 +.... f_k(v)f_k = t$.

אבל האם בהכרח קיים כזה בסיס B כך ש- $B^* = \{f_1,..., f_n\}$?

<u>משפט:</u>

יהי V מ״ו מעל F ויהיו $C = (f_1,..., f_n)$ בסיס של V^* אז קיים בסיס B של V כך ש- $B^* = C$.

<u>הוכחה:</u>

המרחב הוקטורי V^n מוגדר מעל F ומימדו n^2. עבור $B = (b_1,..., b_n) \in V^n$

נתבונן במטריצה $(T(B))_{i,j} = f_i(b_j)$ אנו רוצים למצוא מקור למטריצת היחידה. ההעתקה $T: V^n \to M_n(F)$ המוגדרת ולינארית שכן

$$(T(B + D))_{ij} = f_i((B + D)_j) = f_i(b_j + d_j) = f_i(b_j) + f_i(d_j) = (T(B))_{ij} + (T(D))_{ij}$$

והיא הפיכה שכן המימדים ששווים ואם $T(B) = 0$ אז לכל $b \in B$, $0 = f_1(b) = f_2(b) =... = f_n(b)$.

כלומר $b \in \bigcap_{i=1}^{n} ker(f_i) = (\{f_1,..., f_n\})_0 = (sp(f_1,..., f_n))_0 = (V^*)_0 = \{0\}$ ולכן $b = 0$.

אזי T הפיכה ולכן יש ל-I מקור, B. B בסיס שכן אם $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0$ אז מפעילים f_j

ומקבלים את הדרוש.

<u>מסקנה:</u>

יהי V מ״ו נוצר סופית מעל F ויהיו $C = (f_1,..., f_m)$ בת״ל ב- V^* אז קיימים $(b_1,..., b_m) \in V^m$ בת״ל כך ש-$f_i(b_j) = \delta_{ij}$.

<u>הוכחת המסקנה:</u> גם V^* נוצר סופית, נשלים את C לבסיס של V^* נשתמש במשפט הקודם ונזרוק את הוקטורים שלא רלוונטים. הם עדיין מקיימים את הדרוש

<u>מסקנה:</u> אם V נוצר סופית אז $(M^0)_0 = M$. $U = (U_0)^0$ (הרכבה בשני הכיוונים שווה לזהות)

<u>הוכחה:</u> נוכיח הכלה ושיוויון מימדים, לפי המשפטים האחרונים

$$dim(M) + dim(M_0) = dim(V)$$

$$dim(M_0) + dim((M_0)^0) = dim(V)$$

ולכן $dim(M) = dim((M_0)^0)$

ו- $dim(U) + dim(U_0) = dim(V)$

$$dim(U_0) + dim((U_0)^0) = dim(V)$$

לכן $dim(U) = dim((U_0)^0)$

<u>מסקנה:</u> $R(T) = (Ker(T))^0$ (בשפה של מטריצות $R(A)$ זה המרחב הניצב ל-$Sols(A)$)

<u>הוכחה:</u> $R(T) = ((R(T))_0)^0 = (Ker(T))^0$

<u>מסקנה:</u> $dim(R(T)) = dim(Im(T)) = Rank(T)$ (בשפה של מטריצות זה משפט שכבר ראינו)

<u>הוכחה:</u> $dim(R(T)) = dim(V) - dim(ker(T)) = dim(Im(T))$

מסקנות:

נניח כי V נוצר סופית אזי:

1. $f \in sp(f_1,..., f_n) \leftrightarrow (\{f\})_0 \supseteq (\{f_1,..., f_n\})_0$ (בשפה של מטריצות אם משוואה R היא צירוף לינארי של משוואות אחרות אמ״ם קבוצת הפתרונות שלה מכילה את הפתרון של מערכת המשוואות)
2. $v \in Sp(v_1,..., v_n) \leftrightarrow (\{v\})^0 \supseteq (\{v_1,..., v_n\})^0$

<u>הוכחה:</u> גרירה אחת היא טריוויאלית. בכיוון השני, אם $(\{f\})_0 \supseteq (\{f_1,.., f_n\})_0$ אז $((\{f_1,.., f_n\})_0)^0 \subseteq ((\{f\})_0)^0$ ולפי מה שהוכחנו $sp(f) \subseteq sp(f_1,..., f_n)$ שזה שקול למה שאמרנו.

<u>דיון:</u> איך בכל זאת לזהות את V עם פונקציונלים באופן טבעי? אנחנו יודעים כי $x = (x^t)^t$. האובייקט $(x^t)^t$ הוא פונקציונל במרחב $((R^m)^*)^*$. באופן אבסטרקטי אנחנו נראה כי יש דרך טבעית לזהות בין V ו-V^{**}.

הגדרה: המרחב הדואלי השני

<u>הגדרה</u>: לכל $x \in V$ נגדיר העתקה $C_x: V^* \to \mathbb{F}$ ע"י נוסחה $C_x(t) = t(x), t \in V^*$.

למה: $C_x \in V^{**}$ לכל $x \in V$.

<u>משפט:</u> הפונקציה $C: V \to V^{**}$ היא מונומורפיזם. יתר על כן אם V נוצר סופית אז היא איזומורפיזם

<u>הוכחה:</u> משיוויון מימדים מספיק להוכיח אחד מהם ולא נכון למרחבים אינסופיים אז נוכיח פשוט חח״ע חח״ע אם $x \neq 0$ אז אפשר להגיד פונקציונל שלא מתאפס על x (שיחשבו לבד). ואז $C_x \neq 0$.

לכן חח״ע.

הערה: זה לא נכון עבור מרחבים מימד אינסופי ודוגמא נגדית ניתנת ע״י מרחב הפולינומים $R[X]$, המרחב הדואלי הוא R^N והמרחב הדואלי שלו הוא שוב R^N (פשוט כי דברים נקבעים על בסיס).

תרגיל קשה מאוד!- להוכיח כי R^N ו- R[X] לא איזומורפיים.

בתרגיל בית תראו איך האיזומורפיזם הקנוני מקל לנו על החיים.

7. ⋆ (שאלה ממבחן) נגדיר $d+1$ פונקציונלים על $V = \mathbb{R}_d[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | deg(p) \leq d\}$ על ידי: $\phi_i(p(x)) = p(i), i = 1, ..., d+1$. הוכיחו כי $\phi_1, ..., \phi_{d+1}$ בסיס ל-V^*.