שיעור 3:(פתרונות של משוואה)

- קבוצת הפתרונות למשוואה מתוך קבוצה נתונה. ומערכת משוואות בנעלם אחד.
- משוואות שקולות.
- קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות במספר נעלמים וההתאמה של פתרון מול ח-יה (תזכורת לגבי שיוויון ח-יות).

הגדרת משוואה:
יהיו שתי פונקציה f, g, עם $Dom(f) = Dom(g)$, היא טענת שיוויון מהצורה $f(x_1, x_2,..., x_n) = g(x_1,..., x_n)$.
באשר

הערה: תמיד ניתן לשנות מעט את הפונקציות כך שתיהיינה עם אותם המשתנים.

לתת דוגמאות מוזרות: משוואה על קבוצות עם -איחוד וחיתוך, משוואה דיפרציאלית על פונקציות, משוואה של מספרים. $min(A \cup \{5\}) = 3x + 2$- $f(A, x), g(A, x)$.

הגדרה: השמה למשוואה- $< a_1,.., a_n >\in Dom(f) = Dom(g)$ פתרון למשוואה זו השמה שעבורה הטענה נכונה.

דיון: מה קובע את ח? מה הסיבה שצריך סדר?

הגדרה: אם התחום הוא פשוט X^n. המשוואה נקראת משוואה מעל הקבוצה X.

הגדרה: קבוצת הפתרונות של משוואה מעל X מתוך הקבוצה A (הקבוצה מוכלת בתחום).

דוגמא: משוואה מספרית עם קבוצות משתנות, שורש ריבועי, משוואה של קבוצות עם קבוצה של קבוצות, מספר משתנים קבוצת הפתרונות היא ח-יות (לדוגמא מעגל, ריבוע, ועוד)

דוגמא: $(x - 3)(y - 3)(x - 2) = 0$ קבוצת הפתרונות היא
$\{< 3, y > | y \in R\} \cup \{< x, 3 > | x \in R\} \cup \{< 2, y > | y \in R\}$ שזה איחוד של שלושה קווים.

הגדרה: משוואה ללא פתרון, פתרון יחיד, a פתרונות באשר a עוצמה.

מערכת משוואות: פורמלית ח-יה של משוואות.
משוואות עם אותם הנעלמים (ייתכן ובמשוואות מסוימות חלק מהנעלמים לא מופיעים, אז כל -הצבה שלהם לגיטימית) סימון E_i המשוואה ה-i במערכת E.

הגדרה: קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות. $Sols_A(L)$.

דוגמא: משהו לינארי, חיתוך של ישר ומעגל.

הגדרה: הגדרת מערכות משוואות שקולות.

דוגמא: הוכחה כי שתי משוואות הן שקולות $x + 2 = 0$, $2^x = 1/4$.

הגדרה: פעולות משמרות פתרונות, להרכיב פונקציה על שני האגפים,

מתי מקבלים משוואות חדשות שקולות?

דוגמא: יהי R חוג.
חיבור של איבר $\alpha \in R$,
הכפלה ב- $\alpha \in R$- אם $E = "f = g"$ נסמן $\alpha \cdot E = "\alpha \cdot f = \alpha \cdot g"$, או $E/ \cdot \alpha$
העלאה בריבוע לא משמרת פתרונות. לקיחת שורש לא משמרת פתרונות.

טענה: אם g חח״ע אז הפעולה משמרת פתרונות. בפרט אם α הפיך אז $\alpha \cdot E$ משמרת פתרונות

הוכחה: אם x פתרון אז $f(x) = h(x)$ ולכן $g(f(x)) = g(h(x))$ (ללא תלות החח״ע) ואם g חח״ע אז גם כל פתרון חדש ישאר פתרון.

פעולות בין משוואות:
יהיו $E_1 = "f_1 = g_1"$ ו- $E_2 = "f_2 = g_2"$ משוואות מעל חוג R.
חיבור (חיסור) המשוואות זו המשוואה $E_1 + E_2 := "f_1 + f_2 = g_1 + g_2"$.
כפל משוואות זו המשוואה $E_1 \cdot E_2 := "f_1 \cdot f_2 = g_1 \cdot g_2"$

תרגיל: הוכיחו כי $Sols(E_1) \cap Sols(E_2) \subseteq Sols(E_1 + E_2)$ וגם $Sols(E_1) \cap Sols(E_2) \subseteq Sols(E_1 \cdot E_2)$.
האם בהכרח מתקיים שיוויון?

הגדרה (העשרה): קבוצה A נקראת אלגברית אם היא קבוצת פתרונות של מערכת משוואות בה כל משוואה היא פולינום בכמה משתנים.

דיון: התחום שחוקר קבוצות פתרונות כאלה נקרא גיאומטריה אלגברית וזה תחום קשה וסבוך.

אלגברה לינארית חוקרת קבוצות פתרונות של מערכת משוואות מצורה יותר פשוטה.

הגדרה: יהי F שדה. משוואה נקראת לינארית מעל F, היא משוואה מהצורה .....
מערכת משוואות לינארית מעל F היא מערכת שבה כל משוואה היא לינארית.
סימון של מערכת משוואות ואינדקסים.

גיאומטריה:

משפט: קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינארית מעל R עם שני נעלמים היא: קבוצה ריקה, נקודה, ישר או כל המישור.

הוכחה: משוואה לינארית עם שני נעלמים ממשיים היא מהצורה $ax + by = c$.
מקרה 1- אם $a = b = 0$ וגם C=0 מקבלים את כל המישור.
מקרה 2- a=b=0 וגם $c \neq 0$ מקבלים קבוצה ריקה.
מקרה 3- $b \neq 0$ מקבלים ישר $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$ שאינו מקביל לציר ה-y.
מקרה 4- $b = 0$ אז נותר המקרה ש $a \neq 0$ מקבלים את הישר המקביל לציר ה- y : $x = \frac{c}{a}$

לגבי מערכת משוואות לינארית, קבוצת הפתרונות היא חיתוך של קבוצות פתרונות של משוואות לינאריות, חיתוך של ישרים ומישורים יכול לתת או קבוצה ריקה או נקודה או ישר או מישור.

באופן דומה,
משפט: קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינארית ב-R^3: קבוצה ריקה, נקודה, ישר, מישור או כל המרחב.

שאלה: האם לכל מישור וישר הוא קבוצת פתרונות של מערכת משוואות לינארית? נראה בהמשך כי התשובה היא כן.