שיעור 5:(מטריצה של מערכת משוואות לינארית)

תזכורת: חיבור n-יות וכפל בסקלר.

דיון: מערכת משוואות על m משוואות וn נעלמים שקולה למשוואה וקטורית אחת של n וקטורים בF^m .

דוגמא: איך לתרגם מערכת למשוואה.

הגדרה: צירוף לינארי הוא ביטוי מהצורה... רישום גם עם סיגמא.

הגדרה: אומרים שn-יה היא צירוף לינארי של סדרת n-יות אם....

דוגמא: הצגה כצירוף לינארי, צירוף לינארי של וקטורי היחידה וסימון של e_i.

משוואת הצירוף הלינארי: בהנתן k וקטורים בF^m....

מסקנה: n-יה היא צירוף לינארי של... אם ורק אם קיים פתרון למשוואת הצירוף הלינארי.

תרגיל: האם משהו צירוף לינארי של וקטורים אחרים?

הגדרה: כפל מטריצה ב-n-יה.

דוגמא:
1. כפל מטריצה ב-nיה,
2. מתי מוגדר ומתי לא מוגדר.
3. מקרה פרטי של משוואה אחת (והגדרת מכפלה סקלרית)
4. המטריצה של סדרת n-יות.
5. כפל של מטריצה בnית יחידה.

מסקנה: וקטור הוא צירוף לינארי אמ״ם למטריצה של סדרת ה-n-יות שווה לוקטור יש פתרון.

נוסחאות:
1. ניסוח של מכפלה עם סיגמה ואיך ״לדמיין" כפל מטריצה בוקטור.
2. ניסוח של כפל מטריצה ב-n-יה באמצעות מכפלה סקלרית.

דוגמאות:
1. **רגילות/ כלליות-** ב-R^2 אפשר לחשוב על העמודות כמו שני חצים, להכפיל בסקלר זה למתוח ולחבר זה כלל המגבילים.
2. הכפלה של מטריצה ב-n-יות יחידה.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3. **<u>מטריצת סיבוב:</u>**
טענות לגבי מטריצת סיבוב: 1. $||Rv|| = ||v||$ .2 $R(\lambda v) = \lambda(Rv)$ .3 $||v|| = 1$ אז $arg(Rv) = arg(v) + \theta$
מסקנה: לכל v, Rv הוא סיבוב של v ב-θ מעלות. אכן, לפי 1, Rv ו-v על אותו מעגל. ניתן להציג פולרית $v = ||v|| \cdot e$ כאשר $||e|| = 1$ ו-$arg(e) = arg(v)$. לפי 2, $Rv = ||v||\ Re$ לפי 3, $arg(Re) = arg(e) + \theta$ לכן $arg(Rv) = arg(Re) = arg(e) + \theta = arg(v) + \theta$.

4. **<u>מטריצת תמורה-</u>** לכל תמורה $\sigma \in S_n$ נגדיר מטריצת תמורה $P_\sigma = (e_{\sigma(1)},..., e_{\sigma(n)})$.
מתקיים $(P_\sigma \cdot v)_i = v_{\sigma(i)}$.

<u>תכונות של כפל מטריצה ב-N-יה:</u>
- פילוג
- סקלר יוצא החוצה
- $Ax = 0$ לא אומר כי A=0 או x=0.סוג של ״מחלקי אפס״.

<u>תרגיל:</u> (כבר ראינו אבל ההוכחה פשוטה) הוכיחו כי אם קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות ליאנרית הומוגנית היא תת חבורה חיבורית של F^n.
הוכחה:
1. $A0 = 0$
2. $A(v + u) = Av + Au = 0 + 0 = 0$
3. $A(\alpha v) = \alpha(Av)$

הגדרה: מטריצת היחידה, סימון I_n. מטריצת ה-0.

טענה: לכל b, מתקיים Ib=b ו-0b=0.

<u>כתיב מטריציוני של מערכת משוואות</u>

<u>טענה:</u> כתיב מטריציוני של מערכת משוואות ושקילות בין משוואה מטריציונית לבין מערכת המשוואות.

<u>ניסוח של טענות משיעור קודם בשפה מטריוציונית:</u>
תהא $A \in M_{m\times n}(F)$, אזי
1. אם $m < n$ אז לכל b למערכת $Ax = b$ או שאין פתרון או שיש לפחות $|F|$ פתרונות.(לא יכול להיות פתרון יחיד)
2. אם $m = n$ אז לכל b, למערכת $Ax = b$יש פתרון יחיד אמ״ם $A = I$.

<u>מסקנה:</u> אם $m = n$, וקיים b כך שלמערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד אז לכל b למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

<u>משפט:</u> תהא $A \in M_{m\times n}(F)$ ונניח כי A' היא צורת המדרגות הקנונית של A.

ב-A' יש שורת 0, אמ"ם קיים b כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון.

<u>הוכחה:</u>

אם ב-A' אין שורת 0, אז לא יכולה להתקבל שורת סתירה ולכן לכל b למערכת Ax=b יש פתרון.

אם ב-A' יש שורת 0, נסמן את פעולות הדירוג ב- $f_k(f_{k-1}(...(f_1(A)...) = A'$. מכיוון ו-A' מדורגת וקיימת שורת 0, בהכרח השורה האחרונה היא שורת 0. נגדיר $b' = (0,....0,1) \in F^m$ ונגדיר $b = {f_1}^{-1}({f_2}^{-1}(....({f_{k-1}}^{-1}(b')...) \in F^m$. למערכת $Ax = b$ אין פתרון שכן לאחר שנדרג נגיע למערכת $A'|b'$ והשורה האחרונה בה היא שורת סתירה.

<u>מסקנה:</u> אם A מטריצה mxn כך ש- n<m אז קיים b כך שלמערכת Ax=b אין פתרון.

<u>הוכחה:</u> בצורת המדרגות של A בהכרח יש שורת 0.

<u>מסקנה:</u> אם $n = m$ ולכל b קיים פתרון, אז לכל b קיים פתרון יחיד.

<u>הוכחה:</u> אם לכל b קיים פתרון אז בצורה הקנונית של A אין שורת 0 ולכן בכל שורה נפתחה מדרגה ולכן זו חייבת להיות מטריצת היחידה. לכן לכל b קיים פתרון יחיד.

<u>משפט:</u> תהא $A \in M_n(F)$. הבאים שקולים:

1. A שקולת שורות ל-I_n
2. לכל b, למערכת Ax=b יש פתרון יחיד.
3. לכל b למערכת Ax=b יש פתרון.
4. למערכת Ax=0 יש פתרון יחיד.
5. קיים b כך שלמערכת Ax=b יש פתרון יחיד.

<u>הוכחה:</u> 1 גורר 2 ראינו 2 גורר 3 טריוויאלי

3 גורר 1 ראינו.

3 גורר 4 טריוויאלי, 4 גורר 5 טריוויאלי, ו-5 שקול ל-2 לפי המסקנה.

<u>תרגיל:</u> יהיו $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ פולינום ממעלה n. יהיו $b_0,...,b_n \in R$ הראו כי קיים ויחיד פולינום כך ש-

א. $p(0) = b_0 \;\; p'(0) = b_1,...,\; p^{(n)}(0) = b_n$.

ב. $p(1) = b_0\, p'(1) = b_1,....\; p^{(n)}(1) = b_n$.

<u>סדרת העמודות של מטריצה</u>

<u>הגדרה:</u> בהנתן סדרה (ניסוח עם n-יה של m-יות), מתאימה מטריצה (שאין לה סימון) ובהנתן מטריצה A מתאימה סדרת עמודות $C_i(A)$ (נסמן גם $R_j(A)$)

שתי שאלות מעניינות אתנו:

<u>שאלה 1:</u> (ניסוחים שקולים)

1. האם לכל b למערכת $Ax = b$ יש פתרון?

2. האם כל b הוא צירוף לינארי של סדרת העמודות?

<u>הגדרה:</u> סדרה פורשת (מקרה של מספר סופי של וקטורים) ניסוח ע״י כפל המטריצה.
<u>דוגמא:</u> דוגמא לסדרה פורשת ב-R^2 ומשמעות גיאומטרית. לתת גם דוגמא של שלושה וקטורים. לשאול האם ניתן למצוא וקטור 1 פורש?
<u>שאלה 2:</u>

1. האם למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד? שאלה לא מנוסחת היטב (לכל? קיים? מנסחים יחידות, אם x ו-y שתי פתרונות אז הם שווים)
2. לכל b, האם ניתן לרשום כצירוף לינארי של העמודות בשני אופנים אז האופנים שווים? כלומר אם ניתן לרשום אז באופן יחיד.

<u>הגדרה:</u> של סדרת ח-יות בת״ל (הגדרה זמנית ע״י לכל b עבורו קיים פתרון צירוף לינארי יחידי).

<u>דוגמא:</u> ב-R^2 לתת דוגמא של שני וקטורים ושל וקטור 1, לשאול האם אפשר למצוא 3?

<u>הגדרה:</u> בסיס (בת״ל ופורשת) כלומר לכל וקטור קיים ויחיד פתרון (קיום ויחידות)

<u>דוגמאות-</u>

1. הבסיס הסטנדרטי
2. בסיס לא סטנדרטי
3. דוגמא לקבוצה פורשת שאינה בת״ל וקבוצה בת״ל שאינה פורשת.

<u>תרגיל:</u> יהי u,w,v בסיס של R^3 . יהיו x, y שתי שלשות נוספות ב-R^3. הראו כי למשוואה $su + tw + rv + lx = y$ יש פתרון יחיד מהצורה $(s, t, r, l) = (a, b, c, 5)$.