<u>שיעור 6:(אלגברה לינארית ב-F^n בת״ל פורשת למרחבי n-יות)</u>

<u>מרחב ה-n-יות.</u>

אנו מתרכזים בקבוצה F^n יחב עם פעולת החיבור וכפל בסקלר מהשדה F. ביחד עם תכונות מסוימות שאפשר לוודא שאכן מתקיימות , השלשה $<F^n,+,x>$ היא מבנה שנקרא ״מרחב וקטורי״.

<u>הגדרה:</u> תת מרחב זו תת חבורה חיבורית של F^n שסגורה לכפל בסקלר.

<u>דוגמאות:</u>

1. קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינארית הומוגנית מעל F, עם n משתנים.
2. קבוצת כל הרכיבים עם 0 ב-x.
3. כל אלא שסכום הרכיבים הזוגיים שווה לסכום הרכיבים האי זוגיים.
4. לא תת מרחב, הרביע הראשון, קבוצת הפתרונות של לא הומוגנית.

<u>טענה:</u> קבוצת הפתרונות של מערכת משוואות לינארית הומוגנית היא תמ״ו
הוכחה: ראינו זאת בשיעור הקודם.

<u>טענה:</u> תת מרחב סגור לצירופים לינארים.
<u>הוכחה:</u> באינדוקציה.

<u>טענה:</u> (בוחן תת מרחב) עבור תת קבוצה A אם ורק אם:

1. 0 שייך ל-A
2. A סגורה לחיבור
3. סגורה לכפל בסקלר

אזי A תת מרחב.

<u>הוכחה:</u> לפי המשפט של חבורות נותר לבדוק סגירות לנגדי, זה נובע מסגירות לכפל בסקלר וכך ש- .

<u>תרגיל:</u> אפשר להחליף את 1 ל-״לא ריקה״.

<u>טענה:</u> חיתוך של תתי מרחב הוא תת מרחב.
<u>הוכחה:</u> תרגיל.

<u>סדרות פורשת:</u>

<u>הגדרה:</u> ספאן של סדרה סופית של n-יות.

<u>הגדרה:</u> ספאן של קבוצת וקטורים כצירוף לינארי של מספר סופי מבינהם.

<u>תרגיל:</u> ההגדרות שקולות עבור קבוצה סופית.

דוגמא: לספאן וציור הקבוצה המתקבלת.

תרגיל: K מוכל ב- $sp(K)$.

טענה: ספאן של וקטורים הוא תת מרחב.

הערה: ספאן של מספר סופי של וקטורים זה כל ה-b כך שלמערכת $Ax=b$ יש פתרון.

דוגמא: בדיקה כי וקטור נמצא בספאן.

טענה: סדרה פורשת אם״ם הספאן שלה שווה לכל המרחב.

טענה: קבוצת פתרונות של מערכת הומוגנית היא ספאן של וקטורים.

דיון: האם כל תת מרחב הוא ספאן של וקטורים?

טענה: כל ספאן של וקטורים הוא קבוצת פתרונות של מערכת הומוגנית.
הוכחה: להכליל למקרה הכללי את הרעיון מהדוגמא הבאה:

דוגמא: לאיך יוצרים מערכת משוואות שמתאימה לספאן?

דיון(מסקנה): אם כל תת מרחב הוא ספאן של וקטורים אז כל תת מרחב הוא גם קבוצת פתרונות.

הגדרה: שרשור של סדרות.

טענה: תהי $v_1,...,v_n$ סדרה ו-u וקטור נוסף, נניח כי הסדרה המורכבת פורשת. אזי $sp(VUu)=sp(V)$ אמ״ם u בספאן.

סדרה בת״ל

הגדרה: תלות לינארית של וקטורים, הגדרת מרחב התלויות הלינאריות LD של סדרה.

דוגמא: לתלות לינארית ולחישוב של LD.

הערה: $LD=Sols(A)$ היא קבוצת הפתרונות של המערכת $AX=0$.

טענה: מרחב התלויות הלינאריות הוא תת מרחב של F^m,+.
הוכחה: תרגיל.

תרגילים:

1. הוכיחו כי n-ית ה-0 לא שייכת לסדרה בת״ל.

2. הוכיחו כי סדרה בעלת איבר אחד היא בת״ל אמ״ם הוקטור לא 0
3. כל תת קבוצה בת״ל של סדרה בת״ל היא בת״ל.

דיון: הגדרנו סדרה בת״ל אם לכל b מתקיימת יחידות הפתרון במשוואת הצירוף הלינארי.
יכולנו גם לשאול האם קיים b כך שיש יחידות הפתרון. מסתבר שזה שקול:
טענה: הבאים שקולים:
1. למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד.
2. קיים b כך שלמערכת Ax=b יש פתרון יחיד.
3. לכל b, אם $Ax_1 = b,\ Ax_2 = b$ אז $x_1 = x_2$.

הוכחה: 1 גורר 2 ברור. אם 2 נכון, אז בצורת המדרגות של A, בכל עמודה נפתחה מדרגה ולכל 3 נובע.
3 גורר 1 כי למערכת ההומוגנית תמיד יש פתרון.

הגדרה: הגדרה חדשה של בת״ל, יותר נוח כי זה פחות לבדוק.

טענה: סדרה בת״ל אמ״ם מרחב התלויות שלה הוא המרחב הטריוויאלי.

טענה שימושית: קיים $x \in LD(u)$ כך ש-$x_i \neq 0$ אמ״ם u_i צירוף לינארי של האחרים.

טענה: תהי v_1,...v_n סדרת וקטורים בת״ל ויהי u וקטור נוסף אזי אחרי הוספת u, היא תשאר בת״ל אמ״ם u לא בספאן.

מסקנה: הבאים שקולים עבור v_1,...v_n .
1. בת״ל
2. אף אחד לא צירוף לינארי של קודמיו(בספאן של קודמיו כאשר מתייחסים גם לסדרה הריקה)
3. אף אחד לא צירוף לינארי של האחרים.

הוכחה:
1 גורר 2 נניח בשלילה כי בת״ל ו-v_k הוא צירוף לינארי של קודמיו אז {v_1,...,v_{k-1} בת״ל כתת סדרה של בת״ל וכאשר מוסיפים את v_k לסדרה, לפי הטענה הקודמת היא כבר לא בת״ל, סתירה לכך שהיא תת סדרה של סדרה בת״ל.

2 גורר 1, באינדקציה נוכיח כי v_1,...,v_k בת״ל ואז גם v_1,...,v_n בת״ל. עבור k=1, בהכרח v_1 לא וקטור ה-0 שכן וקטור האפס הוא צירוף לינארי של קודמיו (כי הוא בספאן של קודמיו). ולכן זו סדרה בת״ל לפי התרגיל השני. נניח כי הטענה נכונה ל-k ואז בצעד אנחנו מוסיפים איבר לסדרה בת״ל (לפי הנחת האינדוקציה(וקיבלנו סדרה בת״ל (לפי התרגיל השלישי) לפי הטענה הקודמת שכן v_k+1 לא צירוף לינארי של קודמיו.
3 גורר 2, טריוויאלי
2 גורר 3, נניח בשלילה שקיים וקטור שהוא צירוף לינארי של האחרים וניקח תלות לינארית שמעידה על כך, אז יש i מקסימלי בתלות שהמקדם אינו 0, ואז v_i המתאים הוא צירוף לינארי של קודמיו, סתירה.

דיון: אם כך המשמעות של בת״ל ברור כעת, היא אומרת משהו פנימי על היחס בין הוקטורים. שימו לב שלא נוח לעבוד עם ההגדרה הזו ״אף וקטור אינו צירוף לינארי של האחרים״ כי זה הרבה לבדוק ולכן ההגדה שנתנו יותר שימושית.

<u>טענה:</u> במטריצה מדורגת, סדרת השורות שאינן 0 היא בת״ל.
<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה כי אף וקטור אינו צירוף לינארי של קודמיו. נניח כי נכון ל-k, ונוכיח ל-k+1 שורות.
ניקח צירוף לינארי שמתאפס, מכיוון שברכיב הראשון, רק הוקטור השורה הראשונה היא 0 אז בהכרח המקדם של השורה הראשונה הוא 0.
נותרנו אם השורות 2,...k+1. נשים לב כי אם אנו מחוקים את השורה הראשונה, עדיין מתקבלת מטריצה מדורת עם k שורות ולכן לפי הנחת האינדוקציה גם כל המקדמים שלה הם 0.

<u>תרגיל:</u>
הוכיחו/הפריכו- אם v_1,...,v_n בת״ל ו u_1,u_2 בת״ל לא בספאן אז שרשורם לסדרה יוצר הסדרה בת״ל.

<u>מספר הוקטורים בסדרות בת״ל פורשות ובסיס:</u>

<u>הגדרה:</u> יהי U תמ״ו, בסיס של U זו קבוצה בת״ל שפורשת את U.

<u>משפט:</u> פחות מ-n n-יות לא פורשות.

<u>הוכחה:</u> נבנה מטריצה שעמודותיה הן הסדרה, מתקיים שם כי מספר השורות גדול ממספר העמודות ולכן קיים b כך שלמערכת Ax=b אין פתרון ולכן הסדרה לא פורשת.

<u>משפט:</u> יותר מ-n ,n-יות לא בת״ל.

<u>הוכחה:</u> נבנה מטריצה, B אז מספר העמודות גדול ממספר השורות ולכן למערכת Ax=0 יש אינסוף פתרונות.

<u>מסקנה:</u> בכל בסיס של F^n יש בדיוק n איברים.
<u>הוכחה:</u> יותר מ-n איברים לא בת״ל ופחות מ-n איברים לא פורש.

מה לגבי תתי מרחב? האם מספר האיברים בבסיס שלהם קבוע?

<u>מסקנה:</u> תהא B סדרת n-יות ונסמן ב-A את המטריצה שעמודותיה הן B:
B בסיס אמ״ם A שקולת שורות למטריצת היחידה. (אפשר להוסיף לרשימה)

<u>הוכחה:</u>

<u>כיוון ראשון:</u> אם B בסיס אז ב-B יש n איברים. אז לפי טענה קודמת, A ריבועית. לפי משפט משיעור קודם, אם A ריבועית ולכל b למערכת Ax=b יש פתרון יחיד (נכון כי B בסיס)
אז A שקולת שורות ל-I_n.

<u>כיוון שני:</u> אם B שקולת שורות למטריצת היחידה אז לכל b למערכת Ax=b יש פתרון יחיד ולכן לפי B בסיס.

<u>משפט (2 מתוך 3):</u> עבור סדרת n-יות בעלת m וקטורים, **<u>כל</u>** שניים מהבאים שקולים לכך שהסדרה בסיס:

1. בת״ל
2. פורשת
3. n=m.

<u>הוכחה:</u>

ברור כי 1+2 גורר 1+3 2+3.
נותר להוכיח כי 2+3 גורר 1 ו- 1+3 גורר 2.

אם n=m ובת״ל אז המטריצה המתאימה ריבועית ולמערכת Ax=0 יש פתרון יחיד ולפי משפט משיעור קודם זה שקול לכך ש-A שקולת שורות ל-I_n ששקול לכך ש-B בסיס לפי משפט קודם.

אם n=m ופורשת אז לכל b למערכת Ax=b יש פתרון ושוב לפי משפט משיעור קודם זה שקול לכך ש-B בסיס.

<u>דוגמא לשימוש:</u> יהי B בסיס אזי v_1+v_1,v_2+v_1,...,v_n+v_1 גם בסיס.