שיעור 7:(אלגברת מטריצות והפיכות מטריצה)

ראינו את הקשר בין מטריצות לבין מערכת משוואות. למטריצה יש עוד שימושים, בשימושים אלה נוח להשתמש בפעולות בין מטריצות.

אנחנו קובעים **חוג** $< R, +, \cdot >$ ומסמנים $M_{m\times n}(R)$ את המטריצות עם רכיבים בחוג.

דוגמא: מטריצה של פולינומים.

תזכורת: שיוויון מטריצות והגדרת מטריצה באמצעות איבר כללי.

הגדרה: פעולות בין מטריצות- חיבור כפל בסקלר

טענה:
1. אסוצ׳
2. קומ׳
3. פילוג ביחס לשתי הכפולות
4. אם R תחום שלמות אז $\alpha A = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee A = 0$

הגדרה: צירוף לינארי של מטריצות (דיון שזה ״ממש כמו״ R^nxm ונדבר על כך בהמשך)

הגדרה: כפל מטריצות (דיון על מתי מוגדר) באמצעות כפל מטריצה ב-ח-יה, הכללה של כפל מטריצה ב-ח-יה.

הערה: מנקודה זו, נבדיל בין $F^n = M_{n\times 1}(F)$ לבין $M_{1\times n}(F)$.

נוסחא: איבר כללי בתוצאת מכפלת מטריצות. איך ״לדמיין״ כפל מטריצות.

טענה:
1. אסוצ׳.
2. פילוג.
3. הוצאת סקלר.
4. מטריצת היחידה, מטריצת ה-0.
5. כפל של מטריצה אלכסונית.

טענה:
1. אין קומ׳.
2. מטריצה מתחלפת עם כל מטריצה אמ״ם היא סקלרית.
3. יש מחלקי 0.

טענה: $< M_n(R), +, \cdot >$ הינו חוג לא חילופי עם יחידה.

הערה: אם F שדה המבנה $< M_n(F), +, \cdot, \cdot_F >$ נקרא אלגברה מעל שדה. (יש פעולת חיבור, כפל וכפל בסקלר אבל הכפל לא יוצר חבורה, כלומר, כמו חוג רק שיש גם כפל בסקלר)

הגדרה: טרנספוז של מטריצה, הגדרת מטריצה סימטרית ואנטי סימטרית

טענה: חוקי טרנספוז.

שאלה 1: בהנתן סדרת n-יות לקבוע האם היא בסיס של R^n.
מספיק להוכיח כי בת״ל, שקול לכך שכשמדרגים מקבלים יחידה.

שאלה 2: במבנה של אלגברת מטריצות, לאיזה איברים יש הופכי בכפל? ולמעשה נוסיף את המטריצות להן יש הופכי בכפל לרשימה הארוכה.

(דיון- נראה כי השאלות שקולות, כלי אלגברי לפתרון שאלה כביכול לא קשורה.)

הגדרה: יהי F שדה ותהא $A \in M_{m\times n}(F)$.

1. נקראת הפיכה מימין, אם קיימת B כך ש- $A \cdot B = I$. (בהכרח I_m ובהכרח $B \in M_{n\times m}(F)$)
2. נקראת הפיכה משמאל, אם קיימת B כך ש- $B \cdot A = I$ (בהכרח I_n ובהכרח $B \in M_{n\times m}(F)$)
3. נקראת הפיכה אם קיימת B כך ש- $A \cdot B = I_m \wedge B \cdot A = I_n$.

סימון: A^{-1}- מותר לרשום כך רק אחרי שהוכחנו כי A הפיכה.

דוגמאות: מטריצת היחידה, מינוס מטריצת היחידה, מטריצת האפס, מטריצה עם שורת אפסים, מטריצה עם עמודת אפסים, מטריצה אלכסונית, מטריצת סיבוב. דוגמא להפיכה מימין.

טענה: היחידה הפיכה, מטריצת ה-0 לא הפיכה. אם במטריצה יש שורת 0 או עמודת 0 אז היא לא הפיכה.
טענה: אם $A \in M_{mxn}(F)$ הפיכה גם מימין וגם משמאל אז היא הפיכה (לא בהכרח אותה מטריצה)
הוכחה: יש X כך ש- $XA = I_n$ ו- Y כך ש- $AY = I_m$ ולכן

$$X = XI_m = X(AY) = (XA)Y = I_nY = Y$$

מסקנה: אם מטריצה הפיכה אז יש הופכית יחידה.
הוכחה: הוכחנו בטענה הקודמת שיוויון בין ההוכפית הימנית לשמאלית ולכן אם ל-A יש שתי הופכיות נשתמש מטענה הקודמת כדי להסיק שיוויון.

טענה:

1. אם A הפיכה אם A^{-1} הפיכה ו- $A = (A^{-1})^{-1}$.
2. A הפיכה אמ״ם A^t הפיכה ו- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

3. $A \in M_{m\times k}(F),\ B \in M_{k\times n}(F)$ הפיכות, אזי $A \cdot B$ הפיכה ו- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

תרגיל: מה ניתן לומר על הפיכות מימין ומשמאל? נסו לנסח טענות מתאימות.

משפט:
1. אםA הפיכה מימין אז לכל b למערכת $Ax = b$ יש פתרון (אמ״ם עמודות A פורשות ולכן $m \le n$)
2. אם A הפיכה משמאל אז למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד (אמ״ם עמודות A בת״ל ולכן $m \ge n$)
3. אם A הפיכה אז לכל b למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד (אמ״ם עמודות A בסיס ולכן $m = n$).

הוכחה:
1. אם יש B כך שלמערכת $AB = I$ אז יהי b, נגדיר $x = Bb$ ולכן $Ax = A(Bx) = (AB)x = Ix = x$ ולכן יש פתרון.
2. אם יש B כך שלמערכת $BA = I$ ו-x פתרון אז $Ax = 0$ ולכן $x = Ix = (BA)x = B(Ax) = B0 = 0$ לכן x הוא הפתרון הטריוויאלי. (גם הכיוון השני נכון אך לא נוכיח זאת כרגע).
3. נניח כי A הפיכה, אז לכל b למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד (לפי השניים הקודמים).

מסקנה: אם A הפיכה אז A ריבועית.
הוכחה: היא הפיכה מימין ומשמאל ולכן בהכרח ריבועית.

1.
מה לגבי הכיוון השני? נוכיח שהוא גם נכון.

משפט: A הפיכה מימין אז לכל b למערכת $Ax = b$ יש פתרון (אמ״ם עמודות A פורשות ולכן $m \le n$)
הוכחה: כיוון אחד ראינו, אם לכל b יש פתרון, בפרט לכל $e_1,..., e_m \in F^m$ יש $b_i \in F^n$ כך ש- $Ab_i = e_i$ ולכן עבור המטריצה B שעמודותיה הן $b_1,..., b_m$ (מטריצה כאמור $n \times m$) נקבל $A \cdot B = I_m$.

תזכורת: פעולה אלמנטרית היא פונקציה ממרחב מטריצות למרחב מטריצות.

טענה (היחס בין דירוג וכפל מטריצות): יהיו A, B מטריצות כך שהכפל $A \cdot B$ מוגדר. תהא פעולה אלמנטרית כלשהי φ. אזי $\varphi(A \cdot B) = \varphi(A) \cdot B$.

במילים: לבצע את הפעולה האלמנטרית על המטריצה השמאלית ואז להכפיל במטריצה B זה כמו לבצע את הפעולה האלמנטרית על המכפלה.
הוכחה: בדיקה עבור כל אחת מהפעולות האלמנטריות ושימוש בנוסחא. לעשות לדוגמא $g =: f_{R_i \to R_i + \alpha R_j}$:
$s \ne i$ $g(AB)_{st} = (AB)_{st}$ ו- $g(AB)_{it} = (AB)_{it} + \alpha(AB)_{jt}$

לעומת זאת, $(g(A)B)_{st} = \sum_{r=1}^{k} g(A)_{sr}B_{rt}$ ולכן אם $s \ne i$ אז $g(A)_{sr} = A_{sr}$ ולכן

$$(g(A)B)_{st} = \sum_{r=1}^{k} g(A)_{sr}B_{rt} = \sum_{r=1}^{k} A_{sr}B_{rt} = (AB)_{st} = g(AB)_{st}$$

$$(g(A)B)_{it} = \sum_{r=1}^{k} g(A)_{ir}B_{rt} = \sum_{r=1}^{k} (A_{ir} + \alpha A_{jr})B_{rt} = \sum_{r=1}^{k} A_{ir}B_{rt} + \alpha\sum_{r=1}^{k} A_{jr}B_{rt} = (AB)_{it} + \alpha(AB)_{jt} = g(AB)_{it}$$

<u>הגדרה:</u> מטריצה אלמנטרית.

$E_{R_i\leftrightarrow R_j} = f_{R_i\leftrightarrow R_j}(I)$ המטריצה המתקבלת מ-I באמצעות החלפת השורות ה-i וה-j.

$E_{R_i\rightarrow\alpha R_i} = f_{R_i\rightarrow\alpha R_i}(I)$ המטריצה המתקבלת מ-I באמצעות הכפלת השורה ה-i ב-α.

$E_{R_i\rightarrow R_i+\alpha R_j} = f_{R_i\rightarrow R_i+\alpha R_j}(I)$המטריצה המתקבלת מ-$I$ באמצעות הוספת השורה ה-j מוכפלת בסקלר α לשורה ה-i.

<u>טענה:</u> אם פעולה אלמנטרית φ אז $\varphi(A) = E_{\phi}A$.

<u>הוכחה:</u> $\varphi(A) = \varphi(I \cdot A) = \varphi(I) \cdot A = E_{\varphi}A$.

<u>טענה:</u> כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה.

<u>הוכחה:</u> נניח כי E_{ϕ} מטריצה אלמנטרית ותהא ψ הפעולה האלמנטרית ההופכית לה. נוכיח כי $E_{\phi} \cdot E\psi = E_{\psi} \cdot E_{\varphi} = I$. לדוגמא כיוון אחד, $E_{\varphi}E_{\psi} = \varphi(I) \cdot \psi(I) = \varphi(I \cdot \psi(I)) = \varphi(\psi(I)) = I$.

<u>דוגמאות:</u> כמה דוגמאות למטריצות אלמנטריות.

<u>משפט:</u>

1. למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד אמ"ם A הפיכה משמאל.
2. לכל b למערכת Ax=b יש פתרון יחיד אמ"ם A הפיכה. (להוסיף לשקילות)

<u>הוכחה:</u>

1. אם למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד, אז $A \in M_{m\times n}(F)$ שקולת שורות למטריצה מהצורה $J = (I_n|0_{(m-n)\times n})^t$ נניח ע"י הפעולות האלמנטריות $f_1,..., f_n$ ותהיינה המטריצות האלנטריות המתאימות $E_1,..., E_n$ אזי $f_n(f_{n-1}(...(f_2(f_1(A)))...) = J$ ולכן
$E_nE_{n-1}.... E_1A = J$(*)

<u>תרגיל קל:</u> $J^t \cdot J = I_n$

נכפיל את המשוואה (*) משני האגפים ב- J^t ונקבל

$$(J^tE_n.... E_1) \cdot A = J^tJ = I_n$$

ולכן A הפיכה משמאל.

2. אם לכל b למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד אז A שקולת שורות למטריצה היחידה $E_nE_{n-1}.... E_1A = I$ ולכן $A = (E_1)^{-1}... (E_{n-1})^{-1}(E_n)^{-1}$ אז A הפיכה כמכפלת מטריצות הפיכות.

וזה מסיים את הוכחת המשפט.

<u>מסקנה:</u> אלגוריתם למציאת המטריצה ההופכית:

בהוכחה ראינו כי אם מדרגים את A ל-I אז מתקיים $E_n E_{n-1} .... E_1 A = I$ לכן $A^{-1} = E_n E_{n-1} .... E_1 I$.

האלגוריתם: את אותן פעולות שמבצעים על A כדי להגיע ליחידה מבצעים על מטריצת היחידה ובסופו של דבר מתקבלת המטריצה ההופכית.

דוגמא לאלגוריתם.

<u>משפט:</u> הבאים שקולים עבור מטריצה ריבועית A:

1. A הפיכה מימין
2. A הפיכה משמאל
3. A הפיכה.
4. A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות

<u>הוכחה:</u> ברור כי 3 גורר 1 ו-2. נראה כי כל אחד מ-1 ו-2 גורר את 3 לחוד. אם 1 אז לפי טענות קודמות עמודות A פורשות, מכיוון ו-A ריבועית נובע מ-2 מתוך 3 כי עמודות A בסיס ולכן A שקולת שורות למטריצת היחידה. לפי המסקנה הקודמת נובע כי A הפיכה. אותו דבר עם 2. 4 גורר 3 ראינו כי מכפלת הפיכות היא הפיכה. לגבי 3 גורר 4,

<u>מסקנה:</u> עבור A,B ריבועיות, AB הפיכה אמ״ם A ו-B הפיכות.

<u>הוכחה:</u> אם AB הפיכה, נסמן ב-C את המטריצה ההופכית לה, אז $A(BC) = (AB)C = I$ ולכן A הפיכה מימין ובפרט הפיכה. אותו דבר ל-B.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו/ הפריכו, לכל שתי מטריצות A,B, אם AB הפיכה אז A,B הפיכות.

<u>משפט מסכם (בנתיים):</u> עבור מטריצה ריבועית A, הבאים שקולים

1. A הפיכה.
2. A שקולת שורות למטריצת היחידה.
3. לכל b למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.
4. למערכת $Ax = 0$ יש פתרון יחיד.
5. קיים b כך שלמערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.
6. A הפיכה מימין
7. A הפיכה משמאל
8. שורות A בסיס
9. שורות A בת״ל
10. שורות A פורשות.
11. A^t הפיכה