<u>שיעור 9:(מרחבים וקטורים כלליים)</u>

הגדרת מרחב וקטורי מעל שדה F(אין גיאומטריה! יש רק אלגברה, אנחנו מדמיינים וקטור ברחב וקטורי כמו חץ, הכפלה בסקלר היא מתיחה של החץ)

<u>הגדרה:</u> מרחב וקטורי/לינארי מעל שדה F זו שלשה $< V, +, \cdot >$ אם

1. $< V, + >$ חבורה חילופית
2. $\cdot : F \times V \to V$ כך ש-:
   א. $\forall v \in V. 1_F \cdot v = v$
   ב. אסוציטיביות: $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$
3. חוקי פילוג: $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ ו- $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2$.

<u>דוגמאות:</u>

1. שדה מעל עצמו.
2. F^n
3. $span((1, 1, 1))$.
4. אם V מ״ו אז V^A גם מרחב וקטורי.
5. $F_n[X]$.
6. $F[X]$.
7. $M_{m\times n}(F)$.
8. C מעל R.
9. מרחב הסדרות $L_2[R] = R^N$.
10. המרחב הטריוויאלי.

<u>טענות בסיסיות:</u>

1. $0_F v = 0_V$
2. $(-1)v = -v$
3. $\alpha v = 0_V \Rightarrow \alpha = 0_F \vee v = 0_V$.

<u>הגדרה:</u> צירוף לינארי- אי אפשר לשים במטריצה.

<u>הגדרה:</u> (תת מרחב), יהי V מרחב וקטורי מעל F, תת קבוצה $U \subseteq V$ נקרא תת מרחב אם $< U, +, \cdot >$ מרחב וקטורי.

<u>משפט (בוחן תת מרחב):</u> U תת מרחב אמ״ם:

1. סגור לחיבור
2. סגור לכפל בסקלר
3. U איננה קבוצה ריקה (או באופן שקול ש-0 נמצא).

<u>הוכחה:</u> התכונות החסרות מהמשפט על חבורות הן תכונות של הפעולה ולא משנה באיזו קבוצה אנחנו מסתכלים.

מסקנה: אם U תת מרחב של V ו-W תת מרחב של U אז W תת מרחב של V.
טענה: תת מרחב סגור לצירופים לינארים (ראינו הוכחה)

דוגמאות:

1. כל המרחב.
2. המרחב הטריוויאלי.
3. כל המטריצות האלכסוניות.
4. R תת מרחב של C מעל R אבל לא מעל C.
5. כל הפונקציות הזוגיות, פונקציות רציפות.
6. קבוצת הסדרות שמהוות פתרון למשוואה רקורסיבית לינארית, קבוצת הפתרונות של מד״ר לינארי הומוגני.

טענה: חיתוך של תתי מרחב הוא תת מרחב.(הוכחה ישירה ממקרה קודם)

משפט: איחוד של תתי מרחב הוא תת מרחב אמ״ם יש הכלה.
הוכחה: אם יש הכלה אז ברור, אם אין הכלה, ניקח $v \in V\backslash W, \;\; w \in W\backslash V$ ואז $v, w \in V \cup W$ אבל $v + w \notin V \cup W$.

הגדרה: ספאן של קבוצה (קונבנציה כי סכום ריק נותן את 0 ולכן ספאן אף פעם לא ריק) וספאן של סדרה.

טענה: הגדרות שקולות לקבוצה סופית (ראינו הוכחה)
טענה: ספאן הוא תת מרחב. (ראינו כבר הוכחה).
תרגיל: $A \subseteq sp(A)$.

טענה: תהא A קבוצה, אזי spA הוא תת המרחב הקטן ביותר (ביחס להכלה) אשר מכיל את A.
כלומר, אם U תת מרחב אשר מכיל את A אז spA מוכל ב-U. כלומר, $K \subseteq U \Rightarrow sp(K) \subseteq U$.
הוכחה:
ראינו כי spA הוא תת מרחב שמכיל את A, נניח כי U תת מרחב שמכיל את A אז מכיון ו-U סגור לצירופים לינארים גם U מכיל את sp(A).

חוקי ספאן:

1. $A \subseteq B \rightarrow span(A) \subseteq span(B)$
2. $A \subseteq span(B) \rightarrow span(A) \subseteq span(B)$
3. $span(span(A)) = span(A)$
4. span(קבוצה ריקה)={0}

הוכחה:

1. להוכיח.
2. נובע מהטענה הקודמת.
3. מתקיים כי $A \subseteq sp(A)$ ולכן $sp(A) \subseteq sp(sp(A))$ בכיוון השני, sp(A) הוא תת מרחב שמכיל את sp(A) ולכן sp(sp(A)) מוכל ב- sp(A)
4. ישירות מהגדרה.

דוגמא: הוכיחו שיוויון של ספאנים...

הגדרה: סדרה פורשת מרחב ותת מרחב. סדרה בת״ל וסדרה בסיס.

הערה: בת״ל לא קשור לאיזה תת מרחב מסתכלים.

דוגמאות:

1. במרחב הפולינומים. להוכיח כי פולינומים ממעלות שונות הם ב״ת. לתת דוגמא של פולינומי לגאנדר.

2. במרחב המטריצות, להוכיח כי אם A חזקות של A פורשות אז A הפיכה.

3. להוכיח כי במרחב הפתרונות לנוסחת נסיגה לינארית, תנאי התחלה בת״ל יוצרים פתרונות בת״ל.

הגדרה: מרחב התלויות הלינאריות LD

טענה: קיים $\overline{x} \in LD((\overline{v_1},..., \overline{v_n}))$ כך ש- $x_i \neq 0$ אמ״ם $\overline{v_i} \in sp((\overline{v_1},..., \overline{v_{i-1}}, \overline{v_{i+1}},..., \overline{v_n}))$.

טענה: תהי $(\overline{v_1},..., \overline{v_n}) \in V^n$. ויהי $\overline{u} \in V$ וקטור נוסף.

1. $sp((\overline{v_1},..., \overline{v_n})) = sp((\overline{v_1},..., \overline{v_n}, \overline{u}))$ אמ״ם $\overline{u} \in sp((\overline{v_1},..., \overline{v_n}))$.
2. נניח כי $(\overline{v_1},..., \overline{v_n})$ בת״ל. $(\overline{v_1},..., \overline{v_n}, \overline{u})$ בת״ל אמ״ם $\overline{u} \notin sp((\overline{v_1},..., \overline{v_n}))$.

מסקנה: הבאים שקולים עבור $(\overline{v_1},..., \overline{v_n})$

1. $(\overline{v_1},..., \overline{v_n})$ בת״ל.
2. אף אחד לא צירוף לינארי של קודמיו. (כלומר לכל $1 \leq i \leq n$, $v_i \notin sp(\overline{v_1},..., \overline{v_{i-1}})$ ו- $v_1 \notin sp(\emptyset)$)
3. אף אחד לא צירוף לינארי של האחרים. כלומר לכל $1 \leq i \leq n$, $\overline{v_i} \in sp((\overline{v_1},..., \overline{v_{i-1}}, \overline{v_{i+1}},..., \overline{v_n}))$)

משפט ההחלפה של ריס: נניח כי $v_1,..., v_n$ קבוצה פורשת של V. ו- $u_1,..., u_m$ בת״ל.

אזי:

1. $m \leq n$
2. קיימים $i_1 <...< i_m \leq n$ כך ש- $\{u_1,..., u_m\} \cup \{v_j \mid j \notin \{i_1,..., i_m\}\}$ עדיין פורשת.

הוכחה: באינדוקציה על m.

עבור m=0 אין מה להוכיח.

נניח כי הטענה הנכונה עבור m ונוכיח עבור m+1.

נתונות $u_1,..., u_{m+1}$ בת״ל ו- $v_1,..., v_n$ קבוצה פורשת. נשים לב כי $u_1,..., u_m$ גם כן בת״ל ולכן לפי הנחת האינדוקציה (אחרי מספור מחדש של הוקטורים) $m \le n$ והסדרה $u_1,..., u_m, v_{m+1},..., v_n$ פורשת (ייתכן כי $n = m$ ואז אין את החלק של ה-v-ים). אם כך, $u_{m+1} \in sp(u_1,..., u_m, v_{m+1},..., v_n)$ ולפי הלמה הקודמת הסדרה $u_1,..., u_m, u_{m+1}, v_{m+1},..., v_n$ תלויה לינארית ולכן יש וקטור שהוא צירוף לינארי של קודמיו. מכיוון ו- $u_1,..., u_m, u_{m+1}$ בת״ל, בהכרח אחד מבין ה-v-ים צירוף לינארי של קודמיו. ולכן נסיק שני דברים:

1. $m + 1 \le n$.
2. ניתן להשמיט אותו ולא לשנות את הפרישה (כלומר הסדרה עדיין תשאר פורשת).

וסיימנו.

מסקנה: אורך של סדרה בת״ל<=אורך של סדרה פורשת.

הוכחה 1: ישירות מלמת ההחלפה.

הוכחה ישירה: $v_1,..., v_n$-בת״ל $u_1,..., u_m$-פורשת. נראה כי $m \ge n$.

אפשר לרשום

$$v_1 = a_{11}u_1 +..., a_{1m}u_m$$
$$v_2 = a_{21}u_1 +..., a_{2m}u_m$$
$$\ldots$$
$$v_n = a_{n1}u_1 +..., a_{nm}u_m$$

למשוואה $x_1v_1 +... x_nv_n = 0$ יש רק פתרון טריוויאלי.

מצד שני, משוואה זו שקולה למשוואה:

$$x_1(a_{11}u_1 +..., a_{1m}u_m) + x_2(a_{21}u_1 +..., a_{2m}u_m) +... + x_n(a_{n1}u_1 +..., a_{nm}u_m) = 0$$
$$(x_1a_{11} +... + x_na_{n1})u_1 + (x_1a_{12} +... + x_na_{n2})u_2 +... (x_1a_{1m} +... + x_na_{nm})u_m = 0$$

נניח בשלילה כי $n > m$ אז למערכת המשוואות הלינארית

$$x_1a_{11} +... + x_na_{n1} = 0$$
$$x_1a_{12} +... + x_na_{n2} = 0$$
$$\ldots$$
$$x_1a_{1m} +... + x_na_{nm} = 0$$

היא מערכת ב-m משוואות ו-n נעלמים ולכן יש לה פתרון לא טריוויאלי, סתירה.

<u>מסקנה:</u> אם למרחב וקטורי יש בסיס, אז אורך של בסיס הוא מספר קבוע.

<u>הגדרה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל F, נגדיר $dim_F(V) = n$ אם עבור איזשהו בסיס (ואז גם כל בסיס) הוא בעל n וקטורים. אם אין בסיס, כרגע זה לא מוגדר (מימוש של רעיון גיאומטרי באופן אלגברי).

<u>דוגמאות לחישוב מימד:</u>

1. תת מרחב כלשהו של R^n. (הגדרה חדשה של ישר, ומישור)

2. מרחב הפולינומים ממעלה n.
3. מרחב המטריצות.
4. מרחב המטריצות האלכסוניות.
5. C מעל R.
6. המרחב הטריוויאלי.
7. מרחה הפתרונות שנוסחת נסיגה מסדר שני. וסיום הסבר לגבי השיטה של פולינום אופייני.
הרחבה: ראינו סדרה בת״ל בעלת שני איברים, קל להוכיח כי היא פורשת (מוצאים מקדמים ואז מוכיחים שיוויון באינדוקציה על n ושימוש ברקורסיה), לכן המימד של מרחב הפתרונות הוא 2.
8. דיון על מרחבים לא נוצרים סופית: מרחב הפולינומים, מרחב הפונקציות הממשיות, R מעל Q.

הגדרה: נאמר כי מרחב וקטורי V מעל F הוא נוצר סופית אם קיימת סדרה סופית פורשת. אם מדברים על מימד של מרחב, ההנחה בקורס שלנו היא שהוא נוצר סופית.

מסקנה: במרחב ממימד n יותר מ-n וקטורים הם ת״ל.

מסקנה: במרחב ממימד n פחות מ-n וקטורים לא פורשים.

משפט: לכל מרחב וקטורי נוצר סופית יש בסיס.

הוכחה: יהי V מ״ו נוצר סופית, תהא $v_1,...,v_n$ סדרה פורשת שלו. אם היא בת״ל אז היא בסיס. אחרת, יש וקטור שהוא צירוף לינארי של האחרים, בה״כ v_n, נשמיט אותו וכך נדלל את הסדרה הפורשת לבסיס

הערה: (תזכורת לאלגוריתמים נאיבים שעובדים גם במרחב כללי)
1. דילול סדרה לבסיס.
2. השלמה של סדרה בת"ל לבסיס.

משפט(הכללה של 2 מתוך 3):
עבור סדרת וקטורים הבאים שקולים:
1. בסיס (בת״ל ופורשת)
2. בעלת n וקטורים ובת״ל
3. בעלת n וקטורים ופורשת
4. פורשת מינימלית
5. בת״ל מקסימלית
6. כל וקטור ניתן להציג באופן יחיד כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

סיום ההסבר על שיטת פולינום אופייני: ראינו כי המימד של מרחב הפתרונות הוא 2, ולכן לפי המשפט האחרון כל שני וקטורים (פתרונות) מהווים בסיס.

טענה: מעל C, תמיד קיים פתרון מהצורה λ^n עבור איזשהו $\lambda \in C$.

הוכחה: נובע מכך שלכל פולינום יש שורש.

זה גם מגדיר את הפולינום האופייני ונותן מוטיבציה לחקור אותו ואז יש משפטים שאומרים בדיוק איך נראים הפתרונות הבסיסיים בכל סיטואציה.

דיון: החיסרון העיקרי במרחבים אבסטרקטיים הוא שאין את הכלי של מטריצות. היתרון הוא שזה מאפשר לנו לדבר וליישם את התיאוריה של אלגברה לינארית לעוד סוגים של אובייקטים מלבד n-יות, לעוד סוגים של משוואות: נוסאות נסיגה לינארית, משוואות דיפרנציאליות ליאנריות ועוד.