

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE  
SECTION DE MATHÉMATIQUES



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

PROJET DE SEMESTRE

# Les Fibrés en Homotopie

Par  
MAXIMILIEN HOLMBERG-PÉROUX

Professeure Responsable  
prof. KATHRYN HESS-BELLWALD

Dirigé par  
MARC STEPHAN

Année Universitaire : 2012-2013  
Semestre d'Automne-Hiver

## Résumé

Le but de ce projet est d'introduire la notion générale de fibré, de présenter quelques exemples notamment les fibrations de Hopf, et d'utiliser la longue suite exacte induite par un fibré afin de calculer des groupes d'homotopie des sphères.

# Table des matières

|                                                   |           |
|---------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction</b>                               | <b>1</b>  |
| <b>1 La notion de fibré</b>                       | <b>2</b>  |
| 1.1 Généralités . . . . .                         | 2         |
| 1.2 Les revêtements . . . . .                     | 3         |
| 1.3 Les fibrations de Hopf . . . . .              | 5         |
| <b>2 La théorie homotopique des fibrés</b>        | <b>18</b> |
| 2.1 La longue suite exacte des fibrés . . . . .   | 18        |
| 2.2 Théorème de la somme directe . . . . .        | 23        |
| 2.3 Les groupes d'homotopie des sphères . . . . . | 25        |
| <b>Conclusion</b>                                 | <b>27</b> |
| <b>Bibliographie</b>                              | <b>28</b> |

# Liste des tableaux

|     |                                                            |    |
|-----|------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Résumé des différents fibrés abordés. . . . .              | 17 |
| 2.1 | Isomorphismes des groupes d'homotopie des sphères. . . . . | 26 |

# Introduction

En mathématiques, la topologie est l'étude des formes, des déformations d'espaces, par des applications continues. Quand est-ce que deux espaces topologiques sont les mêmes, c'est-à-dire homéomorphes ? Cette question se révèle d'une difficulté redoutable.

L'idée fondamentale en topologie algébrique est de convertir des problèmes d'espaces topologiques et d'applications continues en problèmes d'objets algébriques et d'homomorphismes. On espère alors que les problèmes algébriques seront plus simples à résoudre. Un outil fondamental est le  $n$ -ième groupe d'homotopie d'un espace topologique. Cet invariant homotopique, bien que relativement facile à définir, est difficile à calculer, même pour des objets aussi simples soient-ils comme les  $n$ -sphères.

Les revêtements sont des outils basiques liés à cette question. Les *fibrés* sont une des généralisations de ce concept.

Les fibrés («*fiber bundles*» en anglais) sont des objets fondamentaux dans nombreux domaines des mathématiques : géométrie algébrique, topologie algébrique, physique théorique, etc. De façon non-formelle, un fibré est un espace qui «ressemble» localement à un certain produit d'espaces, mais possède une structure topologique globale différente.

Les fibrés codent des informations topologiques et géométriques. Ils parviennent à donner des réponses sur les groupes d'homotopie.

Nous présenterons dans ce projet la notion générale de fibré, et nous aborderons la théorie homotopique liée à cet objet. On étudiera notamment les fibrations de Hopf : cas particuliers de fibrés sur des sphères. Ils permettront d'obtenir quelques résultats sur les groupes d'homotopie des sphères.

# Chapitre 1

## La notion de fibré

On commence par définir le concept de fibré qu'on illustrera par des exemples. Ils permettront de calculer les groupes d'homotopie des espaces topologiques sur lesquels ils sont définis.

### 1.1 Généralités

**Définition 1.1.1.** Soient  $E, B, F$  des espaces topologiques. Soit  $p : E \rightarrow B$  une application continue surjective.

On appelle  $(E, B, F, p)$  un *espace fibré*, ou simplement *fibré*, si pour tout point de  $B$ , il existe un voisinage  $U$  de ce point tel qu'il existe un homéomorphisme  $h : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ p \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U & & \end{array}$$

où  $pr_1$  est la projection sur le premier facteur.

**Terminologie 1.1.2.** On appelle  $E$  l'*espace total*,  $B$  la *base*,  $F$  la *fibres*, et  $p$  la *projection* de l'espace fibré  $(E, B, F, p)$ . L'homéomorphisme  $h$  est appelé la *trivialisation locale* relative à l'ouvert *trivialisant*  $U$ .

**Notation 1.1.3.** On notera le fibré  $(E, B, F, p)$  par :  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ .<sup>1</sup>

Dans certains ouvrages, on l'appelle parfois *espace fibré localement trivial* pour distinguer une situation où l'on n'aurait pas la condition de trivialité locale. Nous ne le ferons pas ici.

**Définition 1.1.4.** Soit  $p : E \rightarrow B$  une application surjective. Pour tout  $b$  de  $B$ , la *fibres au-dessus de  $b$* , notée  $F_b$ , est la préimage du point  $b$  par  $p$ . Autrement dit :  $F_b := p^{-1}(b)$ .

**Remarque 1.1.5.** Que signifie la commutativité du diagramme ?

Il implique que la première coordonnée de  $h$  est juste  $p$ , et donc  $h$  est uniquement déterminée par sa seconde coordonnée : une application  $p^{-1}(U) \rightarrow F$ . Ainsi,  $h$  transporte la fibres  $F_b$  au-dessus de  $b$  homéomorphiquement sur la copie  $\{b\} \times F$ . On a donc  $F_b \cong F, \forall b \in B$ .

Il faut donc voir un espace fibré  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  comme décrivant une union de fibres  $F_b, b \in B$ , paramétrisées par la base  $B$  et « collées » ensemble par la topologie de l'espace total  $E$ . Autrement dit,  $E$  peut être « fibré » en espaces  $F_b$  (tous homéomorphes à  $F$ ) au-dessus de  $B$ .

---

1. Cette notation sera justifiée par la longue suite exacte des fibrés, mentionnée à la page 23.

On présente quelques exemples simples de fibrés.

**Exemple 1.1.6** (Le fibré produit). L'exemple le plus simple serait de considérer les espaces topologiques  $E$ ,  $B$  et  $F$  tels que  $E \cong B \times F$ . La projection sera simplement  $pr_1$ . En considérant l'ouvert trivialisant l'espace  $B$  lui-même, et la trivialisation locale  $h = id_{B \times F}$ , on obtient bien toutes les conditions d'un fibré :  $F \longrightarrow E \cong B \times F \xrightarrow{pr_1} B$ . Un tel espace fibré est appelé un *fibré produit*.

**Exemple 1.1.7** (Le Ruban de Möbius). L'exemple le plus connu est le ruban de Möbius. Célèbre en topologie, il peut être vu comme un espace fibré. En effet, intuitivement, le ruban est obtenu en considérant un segment de droite «au-dessus» d'un cercle qui le parcourt, tout en pivotant une fois. Plus précisément, pour  $I = [0, 1]$ , considérer  $E$  comme le quotient de  $(I \times [-1, 1]) / \sim$ , où l'on identifie par la relation  $(0, v) \sim (1, -v)$ , pour tout  $v$  de  $[-1, 1]$ . Considérer  $p : E \longrightarrow S^1$  induite par la projection  $I \times [-1, 1] \longrightarrow I$ , si bien que la fibre est  $[-1, 1]$ . Il est facile de voir que le produit d'un voisinage d'un point du cercle  $S^1$  avec l'intervalle  $[-1, 1]$  est homéomorphe à la préimage de ce voisinage dans le ruban de Möbius. Par contre, le ruban de Möbius  $E$  n'est pas le produit global de  $S^1 \times [-1, 1]$  : celui-ci est homéomorphe à un cylindre.

Pour mieux comprendre les fibrés, on essaiera de visualiser ce concept dans les différents exemples des prochaines sections.

## 1.2 Les revêtements

Les revêtements sont des cas particuliers de fibrés à fibre discrète.

**Définition 1.2.1.** Soit  $E$  et  $B$  des espaces topologiques. Soit  $p : E \longrightarrow B$  une application continue surjective.

On dit que  $E$  est un *revêtement* de  $B$  par l'application  $p$ , si pour tout  $b$  de  $B$ , il existe un voisinage  $U$  de  $b$ , ainsi qu'une collection  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ <sup>2</sup> d'ouverts de  $E$ , tels que :

- (i)  $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in F} V_\alpha$ ,
- (ii)  $\forall \alpha \in F$ ,  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U$  soit un homéomorphisme.

On appellera aussi l'application  $p : E \longrightarrow B$  un *revêtement*.

**Proposition 1.2.2.** Un fibré  $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ , où  $F$  est un espace discret, est un revêtement.

*Démonstration.* Pour tout  $b$  de  $B$ , considérer l'ouvert  $U$  trivialisant ainsi que la trivialisation locale  $h : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ . Considérer alors la collection  $\{U \times \{\alpha\}\}_{\alpha \in F}$  d'ouverts disjoints de  $U \times F$ . Pour tout  $\alpha$  de  $F$ , poser :

$$V_\alpha := h^{-1}(U \times \{\alpha\}).$$

Remarquer que  $V_\alpha$  est ouvert dans  $p^{-1}(U)$  qui est ouvert dans  $E$ , car  $h$  et  $p$  sont continues. Donc  $V_\alpha$  est un ouvert de  $E$  pour tout  $\alpha$  de  $F$ . De plus, comme  $h$  est bijective, ces ouverts sont deux-à-deux disjoints. Si bien que :  $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in F} V_\alpha$ .

Il reste à voir que pour tout  $\alpha$  de  $F$ ,  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U$  est un homéomorphisme.

On a :  $p^{-1}(U) \cong U \times F$  par  $h$ . Ainsi,  $V_\alpha \cong U \times \{\alpha\}$  par  $h|_{V_\alpha}$ , ce qui induit que  $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \longrightarrow U$  est un homéomorphisme.  $\square$

On se pose alors naturellement la question suivante : les revêtements sont-ils toujours des espaces fibrés discrets ? La réponse est non, il faut que les fibres au-dessus de chaque point soient de même cardinal.

---

2. Noter que dans cette définition, l'ensemble  $F$  n'est muni a priori d'aucune topologie, contrairement à la définition 1.1.1 d'un fibré.

**Lemme 1.2.3.** Soit  $p : E \longrightarrow B$  un revêtement.

Pour tout  $b$  de  $B$ ,  $p^{-1}(b) = F_b$  muni de sa topologie de sous-espace de  $E$  est un espace discret.

*Démonstration.* Soit  $b \in B$ . Soit  $U$  un voisinage de  $b$  et  $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$  ouverts de  $E$  comme dans la définition 1.2.1 du revêtement. Soit  $x \in F_b$ . Par définition, il existe un unique  $\alpha$  de  $F$  tel que  $x \in V_\alpha$ , si bien que  $\{x\} = V_\alpha \cap F_b$ . Ainsi, le singleton  $\{x\}$  est ouvert dans  $F_b$ , pour tout  $x$  de  $F_b$ .  $\square$

**Proposition 1.2.4.** Soit  $p : E \longrightarrow B$  un revêtement. On suppose que chaque fibre au-dessus d'un point de  $B$  soit de même cardinal. Alors il existe  $F$ , un espace discret, tel que  $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$  soit un fibré.

*Démonstration.* On pose  $F = p^{-1}(b_0)$ , où  $b_0 \in B$  fixé (quelconque). D'après le lemme,  $F$  est un espace discret. Soit  $b \in B$ . Noter que  $F_b$  est de même cardinal que  $F$ . Comme  $p$  est un revêtement, il existe un voisinage  $U$  de  $b$  et une collection  $\{V_{\alpha'}\}_{\alpha' \in F'}$  respectant les conditions de la définition 1.2.1 d'un revêtement. Comme les fibres au-dessus de chaque point sont toutes en bijection, on peut choisir d'indicer les  $V_{\alpha'}$  sur l'ensemble  $F$ . Pour tout  $x$  de  $p^{-1}(U)$ , considérer  $\alpha$  l'unique élément de  $F$  tel que  $x \in V_\alpha$ . Poser :

$$\begin{aligned} h : p^{-1}(U) &\longrightarrow U \times F \\ x &\longmapsto (p(x), \alpha) \\ p_{|V_\beta}^{-1}(b') &\longleftarrow (b', \beta). \end{aligned}$$

Par construction,  $h$  est bijective. De plus,  $(b', \beta) \longmapsto p_{|V_\beta}^{-1}(b')$  est continue car  $p_{|V_\beta}$  est un homéomorphisme pour tout  $\beta$  de  $F$ .

Montrons que  $h$  est continue. Soit  $x \in p^{-1}(U)$ , soit  $\alpha \in F$  tel que  $x \in V_\alpha$ . Soit  $W_1 \times W_2 \subseteq U \times F$  un ouvert tel que  $h(x) \in W_1 \times W_2$ . On pose alors :  $V := p^{-1}(W_1) \cap V_\alpha$ . Remarquer que  $V$  est ouvert car  $p$  est continue. On a donc :  $h(x) \in h(V) = W_1 \times \{\alpha\} \subseteq W_1 \times W_2$ . Comme  $F$  discret, alors  $h$  est bien continue. Par conséquent,  $h$  est un homéomorphisme.  $\square$

Un dernier résultat sur les revêtements : il serait aussi intéressant de savoir quand est-ce que les fibres au-dessus de chaque point sont de même cardinal.

**Lemme 1.2.5.** Soient  $X$  un espace topologique, et  $Y$  un ensemble quelconque. Soit  $f : X \longrightarrow Y$  une *application localement constante* (c'est-à-dire pour tout point  $x$  de  $X$ , il existe un voisinage  $U_x$  de  $x$  tel que  $f$  est constante sur  $U_x$ ). Si  $X$  est connexe, alors  $f$  est constante sur  $X$ .

*Démonstration.* Fixer  $x_0 \in X$ . Poser  $y = f(x_0)$ . Considérer :

$$\begin{aligned} U &:= \bigcup_{\substack{x \in X \\ f(x)=y}} U_x, \\ V &:= \bigcup_{\substack{x \in X \\ f(x) \neq y}} U_x. \end{aligned}$$

On a :  $U \cup V = X$  et  $U \cap V = \emptyset$ . Or  $X$  est connexe, donc  $U = X$  et  $V = \emptyset$ . Donc  $f$  est constante sur  $X$ .  $\square$

**Proposition 1.2.6.** Soit  $p : E \longrightarrow B$  un revêtement. On suppose  $B$  connexe.

Alors les fibres au-dessus de chaque point de  $B$  sont toutes en bijection (c'est-à-dire de même cardinal).



*Démonstration.* Il suffit de considérer une application  $f$  qui associe à tout point  $b$  de  $B$  le cardinal de sa fibre  $F_b$ . Remarquer pour tout point  $b$  de  $B$ , il existe un voisinage  $U$  défini comme la définition 1.2.1 du revêtement, si bien que les fibres au-dessus des points de ce voisinage sont toutes en bijections avec  $F_b$ , autrement dit  $f$  est localement constante.

Comme  $B$  est connexe, on applique le lemme 1.2.5.  $\square$

**Corollaire 1.2.7.** Tout revêtement  $p : E \longrightarrow B$  définit un fibré  $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ , avec  $F$  un espace discret, si l'espace  $B$  est connexe.

**Exemple 1.2.8** (Revêtement du cercle par une droite). L'application continue  $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$  donnée par l'équation :  $\exp(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ , est un revêtement. Pour voir cela, on peut, par exemple, considérer l'ouvert  $U$  de  $S^1$  comme l'ensemble des points de première coordonnée strictement positive. On a :

$$\begin{aligned} \exp^{-1}(U) &= \{x \in \mathbb{R} \mid \cos 2\pi x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 2\pi x \in ]2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}[ , k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}[. \end{aligned}$$

On pose  $V_k = ]k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}[$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , si bien que  $\exp^{-1}(U)$  est l'union disjointe des  $V_k$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}$  fixé. La restriction  $\exp|_{\overline{V}_k}$  est injective (propriété des fonctions cosinus et sinus sur  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ). De plus :  $\exp(\overline{V}_k) = \overline{U}$  et  $\exp(V_k) = U$  (pour le voir, utiliser le théorème de la valeur intermédiaire). Comme  $\overline{V}_k$  est compact et  $\overline{U}$  de Hausdorff,  $\exp|_{\overline{V}_k}$  est un homéomorphisme. Donc  $\exp|_{V_k}$  est un homéomorphisme entre  $V_k$  et  $U$ .

Un raisonnement similaire peut être fait pour des ouverts  $U$  définis par l'ensemble des points de deuxième coordonnée strictement positive, de première coordonnée strictement négative et enfin de deuxième coordonnée strictement négative.

Donc  $\exp$  est un revêtement. Comme  $S^1$  est connexe on a en particulier un fibré. Pour calculer sa fibre, il suffit de remarquer que  $\exp^{-1}(y) \cong \mathbb{Z}$ , pour tout  $y$  de  $S^1$ . Donc on a le fibré suivant :

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1.$$

## 1.3 Les fibrations de Hopf

On se consacre ici à définir *les fibrations de Hopf*, exemples particulièrement intéressants d'espaces fibrés.

Avant tout, plusieurs notions doivent être abordées.

### 1.3.1 Les algèbres à division normée $\mathbb{K}$

On définit ici une notion d'algèbre qui nous permettra de construire nos fibrés.

#### Rappels et définitions

**Définition 1.3.1.** Une *algèbre  $\mathcal{A}$  sur un corps  $F$*  est un  $F$ -espace vectoriel, muni d'une application bilinéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (x, y) &\longmapsto xy. \end{aligned}$$

Si l'application ainsi définie est associative, l'algèbre est une *algèbre associative*.

Si elle est commutative, on dit que l'algèbre est une *algèbre commutative*.

L'algèbre est dite une *algèbre unitaire* s'il existe  $1 \in \mathcal{A}$  tel que :  $1x = x1 = x, \forall x \in \mathcal{A}$ .

**Définition 1.3.2.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre. L'associateur  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  est défini par :  $[a, b, c] = (ab)c - a(bc)$ , pour tout  $a, b, c$  de  $\mathcal{A}$ . C'est une application 3-linéaire, c'est-à-dire linéaire dans chacune de ses variables.

**Définition 1.3.3.** Une algèbre  $\mathcal{A}$  est une *algèbre alternative* si :  $\forall a, b \in \mathcal{A}$  :

$$\begin{aligned}(aa)b &= a(ab) \\ (ab)a &= a(ba) \\ (ba)a &= b(aa).\end{aligned}$$

Autrement dit, on a :  $[a, a, b] = [a, b, a] = [b, a, a] = 0$ , pour tout  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{A}$ .

**Remarque 1.3.4.** Noter que toute algèbre associative est alternative.

**Proposition 1.3.5.** Deux des équations de la définition 1.3.3 d'une algèbre alternative impliquent nécessairement la troisième.

*Démonstration.* On montre seulement que la première et la dernière équation impliquent la deuxième. Les autres cas se démontrent de manière similaire.

On a :  $[a, b, c] = -[b, a, c] = [b, c, a]$  pour tout  $a, b$  et  $c$  de  $\mathcal{A}$ . En effet remarquer que :

$$\begin{aligned}0 = [a + b, a + b, c] &= [a, a, c] + [a, b, c] + [b, a, c] + [b, b, c], \text{ par linéarité} \\ &= [a, b, c] + [b, a, c].\end{aligned}$$

D'où :  $[a, b, c] = -[b, a, c]$ . De même :  $[b, a, c] = -[b, c, a]$ . □

**Définition 1.3.6.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre sur un corps  $F$ . On appelle  $\mathcal{A}$  une *algèbre de division*, ou *algèbre à division*, si : pour tout  $a, b$  de  $\mathcal{A}$ , avec  $b \neq 0$ , il existe un unique  $x$  et un unique  $y$  de  $\mathcal{A}$  tels que :  $a = bx = yb$ .

Noter que si  $\mathcal{A}$  est de dimension finie, la condition précédente est équivalente à savoir si pour tout  $a$  et  $b$  dans  $\mathcal{A}$  tels que  $ab = 0$ , on a  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

Si de plus  $\mathcal{A}$  est alternative et unitaire, la condition précédente est équivalente à savoir si pour tout  $a$  non nul de  $\mathcal{A}$ , il existe un élément  $b$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $ab = ba = 1$  (pour prouver la réciproque on utilisera le lemme 1.3.8). On note  $a^{-1} := b$ . On dit que  $a$  est *inversible*.

**Remarque 1.3.7.** Pour toute algèbre à division alternative unitaire de dimension finie, les éléments inversibles sont les éléments non nuls.

Le résultat technique suivant nous sera très utile par la suite :

**Lemme 1.3.8.** Sur une algèbre alternative unitaire  $\mathcal{A}$ , on a que pour tout élément inversible  $a$ , et tout élément  $c$ ,  $a(a^{-1}c) = c$  et  $(ca^{-1})a = c$ .

*Démonstration.* Remarquer qu'il suffit de prouver que  $[a, a^{-1}, c] = 0$ . Soit  $a, b, c, d \in \mathcal{A}$  quelconques. On a par simples calculs :

$$[ab, c, d] - [a, bc, d] + [a, b, cd] = a[b, c, d] + [a, b, c]d. \quad (1.1)$$

On reprend le même argument en inversant l'ordre des lettres tels que  $(a, b, c, d) = (b, c, d, a)$ , puis on ajoute le résultat à (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned}[ab, c, d] + [b, c, da] + ([bc, d, a] - [a, bc, d]) + ([a, b, cd] - [b, cd, a]) \\ = a[b, c, d] + [a, b, c]d + b[c, d, a] + [b, c, d]a.\end{aligned} \quad (1.2)$$

Comme  $\mathcal{A}$  est alternative, notre travail fait dans la proposition 1.3.5 nous permet de dire que :

$$[x, y, z] = [y, z, x] = [z, x, y], \quad (1.3)$$

pour tout  $x, y, z$  de  $\mathcal{A}$ . Si bien que le membre de gauche de l'équation (1.2) se réduit à  $[ab, c, d] + [b, c, da]$ . En posant  $b = c$ , on obtient :  $[ab, b, d] = b[b, d, a]$ . En changeant les rôles de  $a$  et de  $b$ , et utilisant le résultat obtenue à la démonstration de la proposition 1.3.5, on obtient :  $[a, ba, c] = -a[b, a, c]$ . On l'ajoute à l'équation suivante obtenue de (1.1) :

$$[ab, a, c] - [a, ba, c] + [a, b, ac] = a[b, a, c] + [a, b, a]c,$$

pour obtenir :

$$[ab, a, c] + [a, b, ac] = 0. \quad (1.4)$$

Enfin, en ajoutant l'équation (obtenue de (1.1)) :

$$[ba, a, c] - [b, aa, c] + [b, a, ac] = b[a, a, c] + [b, a, a]c = 0,$$

on obtient finalement :

$$[ab, a, c] + [ba, a, c] - [b, aa, c] = 0. \quad (1.5)$$

On suppose que  $a$  est inversible et que  $b$  est son inverse. De (1.5), on a alors  $[b, aa, c] = 0$ . Ainsi, par (1.3), on a toujours :

$$[aa, b, c] = [a, bb, c] = 0 \quad (1.6)$$

De plus, en remplaçant  $b$  par  $bb$  dans l'équation (1.4), on a :

$$[a(bb), a, c] + [a, bb, ac] = 0 \quad (1.7)$$

Comme  $a(bb) = (ab)b = b$ , on a par conséquent, de (1.6) et (1.7) :  $[a, b, c] = 0$ , autrement dit  $[a, a^{-1}, c] = 0$ . L'équation  $(ca^{-1})a = c$  est aussi prouvée grâce à (1.3).  $\square$

**Définition 1.3.9.** Une *algèbre à division normée* est une algèbre  $\mathcal{A}$  unitaire, de dimension finie, munie d'une norme  $|\cdot|$  telle que :

$$\forall x, y \in \mathcal{A}, |xy| = |x||y|.$$

**Remarque 1.3.10.** *Noter que toute algèbre à division normée est bien une algèbre à division, et de plus  $|1| = 1$ .*

**Exemple 1.3.11.** Les espaces vectoriels  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des algèbres à division normées (en particulier unitaires), associatives et commutatives sur le corps  $\mathbb{R}$ , de dimensions 1 et 2 respectivement. L'ensemble des quaternions  $\mathbb{H}$  est aussi une algèbre à division normée et associative sur  $\mathbb{R}$ , de dimension 4, mais elle est non commutative.

**Remarque 1.3.12.** *Pour toute algèbre à division normée, on peut lui associer une topologie engendrée par la métrique induite par la norme. En effet, la distance  $d$  associée à la norme est donnée par :  $d(x, y) = |x - y|$ , pour tout  $x, y$  dans l'algèbre à division normée.*

### Définition de $\mathbb{O}$ par la construction de Cayley-Dickson

On définit généralement les nombres complexes  $\mathbb{C}$  comme l'ensemble des points notés par la somme formelle  $z = x + yi$ , où  $x, y \in \mathbb{R}$ , muni de certaines règles d'additions et multiplications, et le conjugué de  $z = x + yi$  par  $\bar{z} = x - yi$ . De la même manière, on définit les quaternions  $\mathbb{H}$  par l'ensemble des points de la forme  $z = a + bi + cj + dk$ , où  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

On propose ici une construction alternative de ces ensembles.

Tout nombre complexe, écrit formellement  $x + yi$ , peut être vu comme un couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . L'addition entre ces deux nombres est définie composante par composante, et la multiplication est donnée par,  $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$  :

$$(a, b)(c, d) = (ac - db, da + bc).$$

Le conjugué d'un nombre complexe est ainsi déterminé par :  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \overline{(a, b)} = (a, -b)$ . On peut ainsi noter  $z = (a, b)$  pour tout élément  $z$  de  $\mathbb{C}$ .

De ce raisonnement, on construit les quaternions  $z = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$  comme étant le couple  $z = ((a, b), (c, d)) \in \mathbb{C}^2$ . L'addition est définie composante par composante, et la multiplication est donnée par,  $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}^2$  :

$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}).$$

Le conjugué est défini par :  $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$ . On peut ainsi noter  $z = (a, b)$  pour tout élément  $z$  de  $\mathbb{H}$ .

Fort de cette idée, on peut construire l'ensemble  $\mathbb{O}$  des octonions.

**Définition 1.3.13.** Les *octonions*, appelés aussi *nombres de Cayley*, sont l'ensemble des points  $z = (a, b)$ , où  $a, b \in \mathbb{H}$ . L'addition entre deux octonions est défini composante par composante. Soit  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{H}^2$ , on définit la multiplication par :

$$(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}).$$

Le conjugué est défini par  $\forall (a, b) \in \mathbb{H}^2, \overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$ .

L'ensemble de ces points muni des lois d'addition, de multiplication, et de conjugaison, est noté  $\mathbb{O}$ .

**Remarque 1.3.14.** *L'ordre des termes de la définition de la multiplication a son importance, étant donné que les quaternions ne sont pas commutatifs !*

**Terminologie 1.3.15.** Cette construction de  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{O}$  est appelée *la construction de Cayley-Dickson*.

**Proposition 1.3.16.**  $\mathbb{O}$  est une algèbre à division normée alternative sur le corps  $\mathbb{R}$  de dimension 8.

*Démonstration.* La norme  $|\cdot|$  est définie par :  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ , pour tout  $z$  de  $\mathbb{O}$ . Elle est bien définie car  $z\bar{z} = \bar{z}z \in \mathbb{R}$ . Il est facile de voir que  $|z| \neq 0$  pour tout  $z \neq 0$ , et que  $|\lambda z| = |\lambda||z|$  pour tout  $z$  de  $\mathbb{O}$  et tout  $\lambda$  de  $\mathbb{R}$ . De plus, on peut vérifier que  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , pour tout  $z_1, z_2$  de  $\mathbb{O}$ . Par des calculs directs, on peut montrer que  $\forall x, y \in \mathbb{O}, |xy| = |x||y|$ .

$\mathbb{O}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 8 : une base peut être donnée par :

$$\{(1, 0), (i, 0), (j, 0), (k, 0), (0, 1), (0, i), (0, j), (0, k)\}.$$

Encore par des calculs, on peut montrer que la multiplication est bilinéaire. L'élément  $(1, 0) \in \mathbb{H}^2$  vérifie les conditions d'une algèbre unitaire. Ainsi  $\mathbb{O}$  est une algèbre à division normée.

Enfin on peut montrer l'alternativité de l'algèbre en vérifiant que :

$$(xx)y = x(xy), (yx)x = y(xx),$$

pour tout  $x, y \in \mathbb{O}$ . □

**Proposition 1.3.17.** On a :  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$ , en tant que sous-espaces vectoriels.

**Proposition 1.3.18.** Soit  $\mathbb{K}$  une algèbre à division normée sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $d$ . Alors  $\mathbb{K}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^d$ .

*Démonstration.* Les espaces sont déjà isomorphes en tant qu'espaces vectoriels. Rappelons que dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimensions finies, les normes sont équivalentes. De plus, deux normes équivalentes induisent la même topologie. En effet, soit  $\|\cdot\|$  la norme usuelle de  $\mathbb{R}^d$ . Alors il existe  $\mu, \mu'$  réels strictement positifs tels pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  on a :

$$\mu|x| \leq \|x\| \leq \mu'|x|.$$

Soit  $U$  un ouvert par rapport à la norme  $|\cdot|$ , et  $x$  un élément de  $U$ . Il existe donc une boule  $B$  de rayon  $r$  par rapport à la norme  $|\cdot|$  centrée en  $x$ , contenue dans  $U$ . Alors il existe une boule de rayon  $\mu r$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|$  centrée en  $x$  contenue dans  $B$ . Donc  $U$  est un ouvert par rapport à la norme  $\|\cdot\|$ . On peut faire un raisonnement similaire pour montrer l'autre inclusion de topologies.  $\square$

**Corollaire 1.3.19.** On a les homéomorphismes suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\cong \mathbb{C} \\ \mathbb{R}^4 &\cong \mathbb{H} \\ \mathbb{R}^8 &\cong \mathbb{O}. \end{aligned}$$

### 1.3.2 L'espace projectif $\mathbb{K}P^n$ et les fibrés induits

On peut maintenant définir la notion d'espace projectif sur un espace vectoriel. De manière informelle, l'espace projectif d'un  $F$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n+1$ , est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $n$ . On considère maintenant des espaces vectoriels munis d'une plus grande structure pour mieux décrire ces sous-espaces vectoriels de dimension  $n$ .

#### Définition sur une algèbre à division normée associative

**Définition 1.3.20.** Soit  $\mathbb{K}$  une algèbre à division normée sur  $\mathbb{R}$  : on la suppose associative. Considérer  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ , où  $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^{n+1}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit la relation d'équivalence suivante :

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (z'_0, \dots, z'_n) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : (z'_0, \dots, z'_n) = \lambda(z_0, \dots, z_n),$$

où  $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Il est facile de voir que c'est bien une relation d'équivalence grâce à l'associativité, on note  $[z_0, \dots, z_n]$  la classe d'équivalence de  $(z_0, \dots, z_n)$ . On appelle *l'espace projectif de  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$*  l'ensemble  $\mathbb{K}P^n := (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$  muni de la topologie quotient. L'application quotient associée est notée :

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{K}P^n \\ (z_0, \dots, z_n) &\longmapsto [z_0, \dots, z_n]. \end{aligned}$$

Il est très facile de prouver la proposition suivante.

**Proposition 1.3.21.** Soit  $\mathbb{K}$  une algèbre à division normée sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $d$ . L'ensemble  $U(\mathbb{K}^{n+1}) = \left\{ (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \mid \sum_{i=0}^n |z_i|^2 = 1 \right\}$  est homéomorphe à  $S^{d(n+1)-1}$ .

**Définition 1.3.22.** Soit  $\mathbb{K}$  une algèbre à division normée associative sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $d$ . On considère la sphère unité :  $S^{d(n+1)-1} \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$ .

On définit l'application  $p_{\mathbb{K}} : S^{d(n+1)-1} \longrightarrow \mathbb{K}P^n$ , tel que  $p_{\mathbb{K}} \circ s_{\mathbb{K}} = \pi_{\mathbb{K}}$ , où  $s_{\mathbb{K}}$  est l'application continue surjective définie par :

$$\begin{aligned} s_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow S^{d(n+1)-1} \\ (z_0, \dots, z_n) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^n |z_i|^2}} (z_0, \dots, z_n). \end{aligned}$$

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} & & \\ \uparrow & \searrow \pi_{\mathbb{K}} & \\ S^{d(n+1)-1} & \xrightarrow{\quad p_{\mathbb{K}} \quad} & \mathbb{K}P^n \end{array}$$

L'application  $p_{\mathbb{K}}$  est continue et surjective.

Avant d'expliciter les fibrés induits par ces espaces projectifs, nous avons besoin d'un lemme. Afin de le prouver, nous avons besoin d'un résultat sur les espaces fonctionnels. Soit  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques. On peut munir l'ensemble des applications de  $X$  vers  $Y$ , noté  $Y^X$ , de la topologie compact-ouvert, où une sous-base est donnée par :

$$\mathcal{S} = \{S(C, U) \mid C \text{ sous-espace compact de } X, U \text{ ouvert de } Y\},$$

où  $S(C, U) := \{f \in Y^X \mid f(C) \subseteq U\}$ . On notera  $\text{Map}(X, Y)$  l'espace  $Y^X$  muni de la topologie compact-ouvert. On rappelle que si  $X$  est localement compact et de Hausdorff, alors l'évaluation  $ev : \text{Map}(X, Y) \times X \longrightarrow Y$ ,  $(f, x) \mapsto f(x)$ , est continue.

**Lemme 1.3.23.** Soit  $Y$  un espace localement compact et de Hausdorff. Alors une application  $f : Y \times Z \longrightarrow X$  est continue si et seulement si l'application  $\hat{f} : Z \longrightarrow \text{Map}(Y, X)$ , où l'on a  $\hat{f}(z)(y) = f(y, z)$  pour tout  $y \in Y$  et  $z \in Z$ , est continue.

*Démonstration.* Supposons  $f$  continue. Soient  $C$  un sous-ensemble compact de  $Y$ , et  $U$  un ouvert de  $X$ . Il s'agit de voir que :  $\hat{f}^{-1}(S(C, U)) = \{z \in Z \mid f(C, z) \subseteq U\}$ , est ouvert dans  $Z$ . Soit donc  $z \in \hat{f}^{-1}(S(C, U))$ . Remarquer que le compact  $C \times \{z\}$  est inclus dans  $f^{-1}(U)$ , qui est ouvert dans  $Y \times Z$ . Il existe donc  $V$  ouvert de  $Y$  et  $W$  ouvert de  $Z$  tels que :  $C \times \{z\} \subseteq V \times W \subseteq f^{-1}(U)$ . Si bien que l'on a :  $z \in W \subseteq \hat{f}^{-1}(S(C, U))$ . Donc  $\hat{f}^{-1}(S(C, U))$  est ouvert. Réciproquement, si  $\hat{f}$  est continue, il suffit de remarquer que  $f$  est la composition des applications continues suivante :

$$f : Y \times Z \xrightarrow{id \times \hat{f}} Y \times \text{Map}(Y, X) \xrightarrow{ev} X.$$

□

**Lemme 1.3.24.** Si  $f : X \longrightarrow Y$  est une application quotient, alors  $f \times id : X \times Z \longrightarrow Y \times Z$  est aussi une application quotient si  $Z$  est localement compact et de Hausdorff.

*Démonstration.* On considère  $W$  comme étant l'espace  $Y \times Z$  muni de la topologie quotient induite par  $g = f \times id$ , application quotient de  $X \times Z$  sur  $Y \times Z$ . Autrement dit, un sous-ensemble  $U$  de  $W$  est ouvert si et seulement si  $(f \times id)^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X \times Z$ . On considère l'application  $h$ , identité entre  $Y \times Z$  et  $W$ , si bien que l'on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
X \times Z & \xrightarrow{f \times id} & Y \times Z \\
\downarrow g & \searrow h & \\
W & & 
\end{array}$$

Il suffit de vérifier que  $W$  et  $Y \times Z$  ont les mêmes topologies pour démontrer le lemme. Remarquer que comme  $f \times id$  est continue, pour tout ouvert  $U$  de  $Y \times Z$ ,  $(f \times id)^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X \times Z$ , c'est-à-dire que  $U$  est ouvert dans  $W$ .

Il faut maintenant prouver que tous les ouverts de  $W$  sont des ouverts dans  $Y \times Z$ , autrement dit : il faut montrer que  $h$  est continue. Comme  $g$  est continue (car c'est une application quotient), l'application  $\hat{g} : X \rightarrow \text{Map}(Z, W)$ , du lemme 1.3.23 est aussi continue, car  $Z$  est localement compact et de Hausdorff. Si bien que  $\hat{h} : Y \rightarrow \text{Map}(Z, W)$ , définie comme le lemme 1.3.23 est continue, car  $f : X \rightarrow Y$  est une application quotient. Donc  $h$  est continue.  $\square$

**Théorème 1.3.25.** Soit  $\mathbb{K}$  une algèbre à division normée associative sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $d$ . Alors :

$$S^{d-1} \rightarrow S^{d(n+1)-1} \xrightarrow{p_{\mathbb{K}}} \mathbb{K}P^n$$

est un fibré.

*Démonstration.* Définir :  $U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{K}P^n \mid z_i \neq 0\}$ , pour tout  $i = 0, \dots, n$ .  $U_i$  est ouvert pour tout  $i$ , pour voir cela, il suffit de remarquer que :

$$\pi_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i) = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) \setminus \left( \prod_{j=0}^{i-1} \mathbb{K} \times \{0\} \times \prod_{j=i+1}^n \mathbb{K} \right),$$

qui est ouvert dans  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Pour tout  $i$ , on pose :

$$\begin{aligned}
h_i : p_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i) &\longleftrightarrow U_i \times S^{d-1} : g_i \\
(z_0, \dots, z_n) &\longmapsto ([z_0, \dots, z_n], z_i |z_i|^{-1}) \\
\lambda |z_i|^{-1} s_{\mathbb{K}}(z_0, \dots, z_n) &\longleftarrow ([z_0, \dots, z_n], \lambda).
\end{aligned}$$

Noter que l'on a la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
p_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i) & \xrightarrow{h_i} & U_i \times S^{d-1} \\
& \searrow p_{\mathbb{K}} & \downarrow pr_1 \\
& & U_i
\end{array}$$

Les applications  $h_i$  et  $g_i$  sont bien définies pour tout  $i$ .

A voir :  $h_i$  est un homéomorphisme.

Pour tout  $i$ ,  $(z_0, \dots, z_n) \mapsto [z_0, \dots, z_n]$  et  $(z_0, \dots, z_n) \mapsto z_i |z_i|^{-1}$  sont continues sur  $p_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i)$ . Donc  $h_i$  est continue. Il est facile de vérifier que  $h_i$  est bijective.

Il reste à vérifier que  $g_i$  est continue pour tout  $i$ . Noter que comme  $\pi_{\mathbb{K}}$  est surjective, alors  $\pi_{\mathbb{K}}(\pi_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i)) = U_i$ ,  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ .

L'application  $q := \pi_{\mathbb{K}}|_{\pi_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i)} : \pi_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  est une application quotient. En effet, soit  $V \subseteq U_i$

ouvert, alors il existe  $W \subseteq \mathbb{K}P^n$  ouvert tel que :  $V = W \cap U_i$ . Si bien que  $q^{-1}(V) = \pi_{\mathbb{K}}^{-1}(W \cap U_i) = \pi_{\mathbb{K}}^{-1}(W) \cap \pi_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i)$  est ouvert dans  $\pi_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i)$ . Réciproquement, soit  $V \subseteq U_i$  tel que  $q^{-1}(V)$  est ouvert dans  $\pi_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i)$ . Alors  $\pi_{\mathbb{K}}^{-1}(V) = q^{-1}(V)$  est ouvert dans  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  car  $\pi_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i)$  est ouvert dans  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Comme  $\pi_{\mathbb{K}}$  est une application quotient, alors  $V$  est ouvert dans  $\mathbb{K}P^n$  et donc dans  $U_i$ . On définit l'application  $\gamma_i$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
p_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i) \times S^{d-1} & & \\
q \times id_{S^{d-1}} \downarrow & \searrow \gamma_i & \\
U_i \times S^{d-1} & \xrightarrow{g_i} & p_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i)
\end{array}$$

$\gamma_i$  ainsi défini est continue. Remarquer que  $q \times id_{S^{d-1}}$  est une application quotient d'après le lemme 1.3.24. Donc pour tout ouvert  $V$  de  $p_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i)$ ,  $\gamma_i^{-1}(V) = (q \times id_{S^{d-1}})^{-1}(g_i^{-1}(V))$  est ouvert dans  $p_{\mathbb{K}}^{-1}(U_i) \times S^{d-1}$ , et donc  $g_i^{-1}(V)$  est ouvert dans  $U_i \times S^{d-1}$ . Par conséquent,  $g_i$  est continue.  $\square$

**Corollaire 1.3.26.** Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a les espaces fibrés suivants :

$$\begin{array}{lll}
S^0 \longrightarrow S^n & \xrightarrow{p_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R}P^n \\
S^1 \longrightarrow S^{2n+1} & \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C}P^n \\
S^3 \longrightarrow S^{4n+3} & \xrightarrow{p_{\mathbb{H}}} & \mathbb{H}P^n.
\end{array}$$

Une question légitime peut se poser : peut-on définir l'espace projectif  $\mathbb{K}P^n$ , où  $\mathbb{K}$  n'est pas associative ? La réponse est non, du moins, de façon générale. On peut en effet définir  $\mathbb{K}P^1$ , si  $\mathbb{K}$  est alternative.

### Définition de la droite projective sur une algèbre à division normée alternative

**Définition 1.3.27.** Soit  $\mathbb{K}$  une algèbre à division normée alternative sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $d$ . Considérer  $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ . On définit la relation d'équivalence suivante :

$$(z_0, z_1) \sim (z'_0, z'_1) \iff \begin{cases} z_0 \neq 0, \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : (z'_0, z'_1) = (\lambda, \lambda(z_0^{-1}z_1)) \\ z_1 \neq 0, \exists \lambda \in \mathbb{K}^* : (z'_0, z'_1) = (\lambda(z_1^{-1}z_0), \lambda). \end{cases}$$

C'est bien une relation d'équivalence (le résultat est immédiat avec le lemme 1.3.8). Noter que l'on obtient la même relation que dans le paragraphe précédent si  $\mathbb{K}$  est associatif. On pose  $\mathbb{K}P^1 = (\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}) / \sim$ , muni de la topologie quotient.  $\mathbb{K}P^1$  est appelé la *droite projective de  $\mathbb{K}$*  (ou l'espace projectif de  $\mathbb{K}$  de dimension 1).

On définit l'application  $p_{\mathbb{K}}$  telle que  $p_{\mathbb{K}} \circ s_{\mathbb{K}} = \pi_{\mathbb{K}}$ , où  $\pi_{\mathbb{K}}$  est l'application quotient associée à  $\mathbb{K}P^1$  :

$$\begin{array}{ll}
\pi_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow \mathbb{K}P^1 \\
(z_0, z_1) & \longmapsto [z_0, z_1],
\end{array}$$

et où  $s_{\mathbb{K}}$  est l'application continue surjective définie par :

$$\begin{array}{ll}
s_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} & \longrightarrow S^{2d-1} \\
(z_0, z_1) & \longmapsto \frac{1}{\sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2}}(z_0, z_1).
\end{array}$$

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^2 \setminus \{0\} & & \\
\uparrow & \searrow \pi_{\mathbb{K}} & \\
S^{2d-1} & \xrightarrow{p_{\mathbb{K}}} & \mathbb{K}P^1
\end{array}$$

L'application  $p_{\mathbb{K}}$  est continue et surjective.



**Théorème 1.3.28.** Soit  $\mathbb{K}$  une algèbre à division normée alternative sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $d$ . Alors :

$$S^{d-1} \longrightarrow S^{2d-1} \xrightarrow{p_{\mathbb{K}}} \mathbb{K}P^1$$

est un fibré.

*Démonstration.* La preuve est similaire au théorème 1.3.25 pour le cas  $n = 1$ . On peut vérifier la bijectivité des homéomorphismes grâce au lemme 1.3.8.  $\square$

**Corollaire 1.3.29.** On a le fibré suivant :  $S^7 \longrightarrow S^{15} \xrightarrow{p_0} \mathbb{O}P^1$ .

### 1.3.3 Les homéomorphismes avec les sphères $S^n$

Le but est ici de montrer des homéomorphismes entre les sphères  $S^n$  et les compactifiés des algèbres à division normées sur  $\mathbb{R}$ , ainsi que sur les droites projectives. Ce résultat nous servira pour comprendre les fibrés de Hopf. En faite, cela permettra d'obtenir des fibrés où tous les espaces sont des sphères.

Tout d'abord, regardons le lien entre la droite projective avec un compactifié :

**Théorème 1.3.30.** Soit  $\mathbb{K}$  une algèbre à division normée alternative sur  $\mathbb{R}$ . Considérer  $\mathbb{K} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{K}}$  son compactifié d'Alexandroff. Alors  $\mathbb{K}P^1$  est homéomorphe à  $\widehat{\mathbb{K}}$ .

*Démonstration.* Considérer l'application :

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathbb{K}P^1 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{K}} \\ [z_0, z_1] &\longmapsto \begin{cases} z_1^{-1}z_0, & \text{si } z_1 \neq 0, \\ \infty, & \text{si } z_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il est facile de prouver que  $\widehat{f}$  est bijective. Comme  $\mathbb{K}P^1$  est compact (car il est l'image de l'application continue  $s_{\mathbb{K}}$  définie à 1.3.27) et  $\widehat{\mathbb{K}}$  est de Hausdorff (car  $\mathbb{K}$  est un espace de Hausdorff localement compact d'après 1.3.18), il reste à prouver que  $\widehat{f}$  est continue. Remarquer que l'on a la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & \widehat{\mathbb{K}} \\ \pi_{\mathbb{K}} \downarrow & \nearrow \widehat{f} & \\ \mathbb{K}P^1 & & \end{array}$$

où l'application  $f$  est définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{K}} \\ (z_0, z_1) &\longmapsto \begin{cases} z_1^{-1}z_0, & \text{si } z_1 \neq 0, \\ \infty, & \text{si } z_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pour montrer que  $\widehat{f}$  est continue, il suffit de prouver que  $f$  est continue, car  $\pi_{\mathbb{K}}$  est une application quotient. La continuité de  $f$  est claire aux points  $(x, y) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ , avec  $y \neq 0$ . Comme  $\mathbb{K}$  est une algèbre à division normée, alors  $|xy| = |x||y|$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ . Considérer une suite  $(y_n)$  de  $\mathbb{K}$  qui tend vers 0, avec  $y_n \neq 0$  pour tout  $n$ . Ainsi, comme  $|y_n^{-1}| = \frac{1}{|y_n|}$  pour tout entier  $n$ , alors  $(y_n^{-1})$  tend vers  $\infty$ . En effet, considérer un voisinage de  $\infty$ , son complémentaire dans  $\mathbb{K}$  est compact, c'est-à-dire un fermé borné par Heine-Borel. Donc il existe une boule fermée centrée à l'origine de rayon  $r$  contenant ce complémentaire. Si bien que le complémentaire de la boule

dans  $\widehat{\mathbb{K}}$  est un sous-voisinage de  $\infty$ , celui-ci contenant les points  $(y_n^{-1})$  pour  $n$  tel que  $\frac{1}{|y_n|} > r$ . De plus, si on considère une suite  $(x_n)$  de  $\mathbb{K}$  qui tend vers  $x \neq 0$ , comme  $|x_n y_n^{-1}| = \frac{|x_n|}{|y_n|}$  est valable pour tout  $n$ , cela implique que  $(x_n y_n^{-1})$  tend vers  $\infty$  (on fait le même raisonnement que précédemment). Comme  $\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$  est métrisable, on conclut que  $\widehat{f}$  est continue aux points  $(x, 0)$  avec  $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .  $\square$

On montre maintenant le lien entre les compactifiés et les sphères. Il provient d'un résultat sur les espaces  $\mathbb{R}^d$ .

**Lemme 1.3.31.** Soit  $f : X_1 \longrightarrow X_2$  un homéomorphisme entre des espaces topologiques localement compacts et de Hausdorff. Alors  $f$  peut s'étendre à un homéomorphisme sur les compactifiés d'Alexandroff.

*Démonstration.* Considérer  $\widehat{X}_1 = X_1 \cup \{\infty_1\}$ ,  $\widehat{X}_2 = X_2 \cup \{\infty_2\}$  les compactifiés d'Alexandroff de  $X_1$  et  $X_2$  munies de leur topologie. Définir :

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \widehat{X}_1 &\longrightarrow \widehat{X}_2 \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X_1, \\ \infty_2, & \text{si } x = \infty_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $f$  est un homéomorphisme,  $\widehat{f}$  est clairement bijective. Soit  $U \subseteq X_2$  ouvert, alors,  $\widehat{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$  est ouvert dans  $X_1$ , car  $f$  est continue, et donc ouvert dans  $\widehat{X}_1$ . Soit maintenant  $\widehat{U} = U \cup \{\infty_2\}$ , où  $X_2 \setminus U =: C$  compact dans  $X_2$ . Alors on a :  $\widehat{U} = \widehat{X}_2 \setminus C$ . Ainsi :

$$\widehat{f}^{-1}(\widehat{U}) = \widehat{f}^{-1}(\widehat{X}_2 \setminus C) = \widehat{X}_1 \setminus f^{-1}(C).$$

Comme  $C$  est un compact, et  $f$  homéomorphisme, alors  $f^{-1}(C)$  est un compact de  $X_1$ , en particulier un fermé car  $X_1$  est de Hausdorff, et donc  $\widehat{f}^{-1}(\widehat{U})$  est un ouvert dans  $\widehat{X}_1$ . Ainsi  $\widehat{f}$  est bien continue.

Or  $\widehat{X}_1$  est un compact. De plus comme  $X_2$  est localement compact et de Hausdorff,  $\widehat{X}_2$  est de Hausdorff. Donc  $\widehat{f}$  est bien un homéomorphisme.  $\square$

**Lemme 1.3.32.**  $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \cong \mathbb{R}^n$ , pour tout  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* Poser :

$$\begin{aligned} f : S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{1}{1 + \|y\|^2}(2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1) &\longleftarrow (y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

L'application  $f$  est bijective, continue ainsi que sa réciproque. Donc  $f$  est un homéomorphisme.  $\square$

**Remarque 1.3.33.** Pour comprendre comment fonctionne l'application  $f$  de la preuve du lemme 1.3.32, il suffit de faire un dessin pour les cas  $n = 1, 2$  qui sont plus explicites.

L'application  $f$  est appelée projection stéréographique. Si l'on prend la droite de  $\mathbb{R}^{n+1}$  passant par le pôle nord  $(0, \dots, 0, 1)$  et le point  $x$  de  $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ , alors cette ligne intersecte le  $n$ -plan  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ .

**Théorème 1.3.34.** Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong S^n$ .

*Démonstration.* Il suffit de voir que :  $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\} \cup \{\infty\} \cong S^n$ , et d'appliquer les lemmes précédents ( $\mathbb{R}^n$  est localement compact et de Hausdorff).  $\square$

**Corollaire 1.3.35.** Soit  $\mathbb{K}$  une algèbre à division normée sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $d$ . Alors :  $\widehat{\mathbb{K}} \cong S^d$ .

### 1.3.4 Les fibrations de Hopf

Tout le travail fait dans les sections précédentes va permettre de définir des fibrés particulièrement intéressants sur les sphères de différentes dimensions.

#### La définition des fibrés

En combinant les fibrés obtenus aux corollaires 1.3.26 et 1.3.29, avec les résultats de 1.3.30 et de 1.3.35, on peut donner la définition suivante.

**Définition 1.3.36.** Les *fibrations de Hopf*<sup>3</sup> sont les fibrés suivants :

$$\begin{aligned} S^0 &\longrightarrow S^1 && \xrightarrow{p_{\mathbb{R}}} S^1 \\ S^1 &\longrightarrow S^3 && \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} S^2 \\ S^3 &\longrightarrow S^7 && \xrightarrow{p_{\mathbb{H}}} S^4 \\ S^7 &\longrightarrow S^{15} && \xrightarrow{p_{\mathbb{O}}} S^8 \end{aligned}$$

Les applications  $p_{\mathbb{R}}$ ,  $p_{\mathbb{C}}$ ,  $p_{\mathbb{H}}$  et  $p_{\mathbb{O}}$  sont appelées les *applications de Hopf*.

**Remarque 1.3.37.** Nos applications de Hopf ne sont pas exactement les mêmes projections des fibrés des corollaires 1.3.26 et 1.3.29. On a appliqué les homéomorphismes définis dans les résultats 1.3.30 et 1.3.32.

Une question s'impose, existe-t-il d'autres fibrés de Hopf sur des sphères ? La réponse est non, et cela vient (entre autres) du théorème suivant (admis) :

**Théorème 1.3.38.**  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{O}$  sont les uniques algèbres à division normées sur le corps  $\mathbb{R}$  (à isomorphisme d'algèbres près).

#### Le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Pour visualiser les fibrations de Hopf, peut être que le cas complexe  $\mathbb{C}$  est le plus visuel. On combine les différents surjections et homéomorphismes que l'on a eu jusqu'à présent. Nous avons l'application

$$\begin{aligned} p_{\mathbb{C}} := p : S^3 &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \\ (z_0, z_1) &\longmapsto \frac{z_0}{z_1}, \text{ si } z_1 \neq 0 \\ (z_0, 0) &\longmapsto \infty. \end{aligned}$$

On a le fibré :

$$S^1 \longrightarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2.$$

La 3-sphère est un fibré de cercle  $S^1$  au-dessus de la sphère  $S^2$ . La fibre au-dessus de chaque point  $S^2$  est un cercle sur  $S^3$ . Donc la 3-sphère n'est rien d'autre qu'une union de grands cercles paramétrés par les points de la sphère  $S^2$ .

Passons en coordonnées polaires : on pose  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ , et  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ . L'application est donnée par  $p(r_0 e^{i\theta_0} r_1 e^{i\theta_1}) = \frac{r_0}{r_1} e^{i(\theta_0 - \theta_1)}$ , avec  $|r_0|^2 + |r_1|^2 = 1$ .

On fixe  $\rho := \frac{r_0}{r_1}$ . On considère l'ensemble :

$$T_{\rho} := \left\{ (r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) \in S^3 \mid \frac{r_0}{r_1} = \rho, \theta_0, \theta_1 \in [0, 2\pi] \right\} \cong S^1 \times S^1.$$

---

3. Nommées ainsi en l'honneur de HEINZ HOPF, où il est l'un des premiers à mentionner le mot «fibration», en 1935, dans le mémoire *Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension*.

$T_\rho$  est donc un tore. On n'exclut pas les cas où  $\rho = 0, \infty$  qui sont des cercles dégénérés (respectivement un point et une droite). On peut voir que les tores sont tous disjoints : si  $\rho \neq \rho'$ , alors  $T_\rho \cap T_{\rho'} = \emptyset$ . Les tores remplissent toute la 3-sphère.

Quel est l'image des ces tores sur la sphère  $S^2$  ?

On a :  $p(T_\rho) = \{\rho e^{i(\theta_0 - \theta_1)} \mid (\theta_0 - \theta_1) \in [0, 2\pi]\}$ . Ce sont des cercles de  $\hat{\mathbb{C}}$  de rayon  $\rho$  centrés à l'origine. Par la projection stéréographique, ce sont les cercles parallèles à l'équateur sur la sphère  $S^2$ . Les cas  $\rho = 0, \infty$  sont respectivement les pôle sud et pôle nord de la sphère.

Si bien que le tore est l'union des cercles, fibres au-dessus des points d'un cercle parallèle sur la sphère. Ces cercles sont tous entrelacés et remplissent toutes la 3-sphère (voir figure 1.1 page 16).

L'appellation «fibré» prend ici tout son sens : la 3-sphère est fibrée par des cercles telle un vêtement cousu par des fibres de tissu. On a «cousu» notre espace total  $S^3$  par sa topologie, avec des cercles, grâce à l'application de Hopf  $p$ .

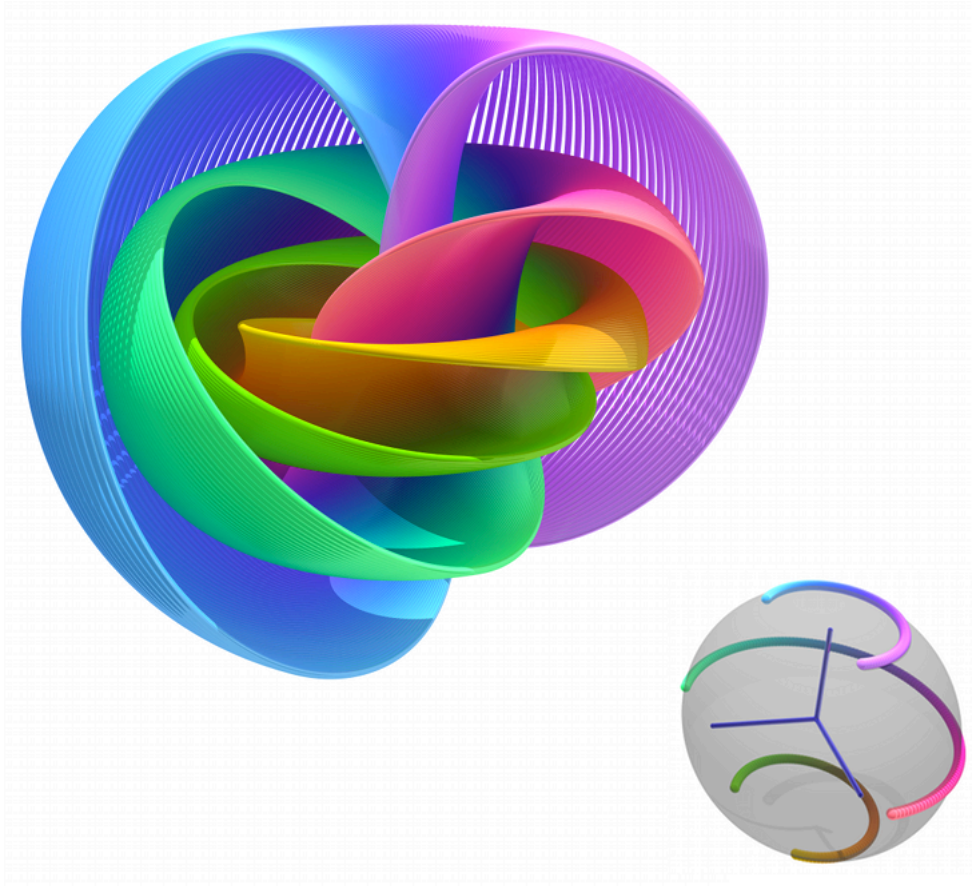


FIGURE 1.1 – A gauche, la 3-sphère, à droite la sphère : chaque point des cercles parallèles est un cercle dans la 3-sphère formant un tore (image de Niles Johnson).

## Liste des différents fibrés évoqués

| Fibré                                                                     | Paragraphe/page abordé |
|---------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| $F \longrightarrow E \cong B \times F \xrightarrow{pr_1} B$               | 1.1.6/p.3              |
| $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$            | 1.2.8/p.5              |
| $S^0 \longrightarrow S^1 \xrightarrow{p_{\mathbb{R}}} S^1$                | 1.3.36 /p.15           |
| $S^1 \longrightarrow S^3 \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} S^2$                | 1.3.36 /p.15           |
| $S^3 \longrightarrow S^7 \xrightarrow{p_{\mathbb{H}}} S^4$                | 1.3.36 /p.15           |
| $S^7 \longrightarrow S^{15} \xrightarrow{p_{\mathbb{O}}} S^8$             | 1.3.36 /p.15           |
| $S^0 \longrightarrow S^n \xrightarrow{p_{\mathbb{R}}} \mathbb{R}P^n$      | 1.3.26/p.12            |
| $S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}P^n$ | 1.3.26/p.12            |
| $S^3 \longrightarrow S^{4n+3} \xrightarrow{p_{\mathbb{H}}} \mathbb{H}P^n$ | 1.3.26/p.12            |

TABLE 1.1 – Résumé des différents fibrés abordés.

## Chapitre 2

# La théorie homotopique des fibrés

Bien que faciles à définir, les groupes d'homotopie se révèlent particulièrement difficiles à déterminer. On présente ici en quoi les fibrés permettent de les calculer (facilement). On rappelle que pour tout couple basé d'espaces topologiques  $(X, A, x_0)$ , c'est-à-dire  $x_0 \in A \subseteq X$ , on a la longue suite exacte suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi_0(X) & \longleftarrow & \pi_0(A) & \longleftarrow & \pi_1(X, A) & \longleftarrow & \pi_1(X) & \longleftarrow & \pi_1(A) & \longleftarrow & \pi_2(X, A) \\ & & & & & & & & & & \uparrow \\ \cdots & \rightarrow & \pi_{n+1}(X, A) & \rightarrow & \pi_n(A) & \rightarrow & \pi_n(X) & \rightarrow & \pi_n(X, A) & \rightarrow & \cdots \rightarrow \pi_2(X) \end{array}$$

où, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)]_*$ <sup>1</sup>, est le  $n$ -ième groupe d'homotopie de  $(X, x_0)$ , abrégé par  $\pi_n(X)$  ici, ainsi que  $\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, *), (X, A, x_0)]_*$ ,  $n \neq 0$ , le  $n$ -ième groupe d'homotopie relatif de  $(X, A, x_0)$ , abrégé par  $\pi_n(X, A)$  ici.<sup>2</sup>

On rappelle aussi que  $\pi_n(X)$  est un groupe pour  $n \geq 1$ , abélien pour  $n \geq 2$ . De même,  $\pi_n(X, A)$  est un groupe pour  $n \geq 2$ , abélien pour  $n \geq 3$ . De plus,  $\pi_n(X, A) = \pi_n(X)$  si  $A = \{x_0\}$ , pour  $n \neq 0$ .

De manière équivalente, les groupes relatifs d'homotopie  $\pi_n(X, A)$  d'un couple basé d'espaces topologiques  $(X, A)$  peut être définis comme l'ensemble  $[(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)]_*$ , et  $J^{n-1}$  est définie de la manière suivante : regarder  $I^{n-1}$  comme la face de  $I^{n-1} \times \{0\}$  de  $I^n$ ,  $J^{n-1}$  est l'union des faces restantes de  $I^n$ , autrement dit  $J^{n-1}$  est l'adhérence de  $\partial I^n - (I^{n-1} \times \{0\})$ , où  $\partial I^n := \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n \mid \exists 1 \leq i \leq n : t_i \in \{0, 1\}\}$ .

### 2.1 La longue suite exacte des fibrés

Il s'agit de voir ici que les fibrés induisent une longue suite exacte de groupes d'homotopie. Pour alléger la notation, on omettra la composition  $\circ$  des applications. On commence par introduire les notions suivantes :

**Définition 2.1.1.** Pour toute application continue  $p : E \rightarrow B$  et toute application continue  $f : X \rightarrow B$ , on appelle un *relèvement* une application continue  $g : X \rightarrow E$  telle que  $f = pg$ .

**Notation 2.1.2.** On notera toujours  $I = [0, 1]$  et on supposera toujours  $n \in \mathbb{N}$ .

---

1. La notation  $[(X, x), (Y, y)]_*$  désigne l'ensemble des classes d'équivalences des applications continues basées  $(X, x) \rightarrow (Y, y)$  par la relation d'homotopie basée.

2.  $D^n$  est la  $n$ -boule de frontière  $S^{n-1}$ .

**Définition 2.1.3.** Soit  $E, B$  des espaces topologiques. Une application continue  $p : E \longrightarrow B$  vérifie la *propriété de relèvement d'homotopie* pour un espace topologique  $X$  si pour toute homotopie  $G : X \times I \longrightarrow B$ , et pour tout relèvement  $\tilde{g}_0 : X \longrightarrow E$  de  $G i_0$ , où  $i_0 : X \longrightarrow X \times I$  est l'inclusion  $x \mapsto (x, 0)$ , il existe alors une homotopie  $\tilde{G} : X \times I \longrightarrow E$  telle que les triangles du diagramme suivant commutent :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{g}_0} & E \\ i_0 \downarrow & \tilde{G} \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

autrement dit :  $\tilde{G} i_0 = \tilde{g}_0$  et  $G = p \tilde{G}$  : l'homotopie  $\tilde{G}$  est un relèvement de  $G$ .

**Définition 2.1.4.** Une application  $p : E \rightarrow B$  est une *fibration de Serre* si elle vérifie la propriété de relèvement d'homotopie pour tout cube  $I^n$ ,  $n \geq 0$ .<sup>3</sup>

**Remarque 2.1.5.** On l'appelle *fibration* (ou *fibration de Hurewicz*) si l'application  $p$  vérifie la propriété de relèvement d'homotopie pour un espace topologique quelconque.

On rappelle aussi la notion suivante :

**Notation 2.1.6.** Soit  $g : (Y, B) \longrightarrow (Z, C)$  une application continue relative sur des espaces topologiques relatifs basés. Il existe une application bien définie pour tout espace  $(X, A)$  :

$$\begin{aligned} g_* : [(X, A), (Y, B)] &\longrightarrow [(X, A), (Z, C)] \\ [f] &\longmapsto [gf]. \end{aligned}$$

En particulier, si  $n \geq 1$ , on a un homomorphisme de groupes :  $g_* : \pi_n(Y) \longrightarrow \pi_n(Z)$ .

On énonce une propriété importante démontrée par Serre :

**Théorème 2.1.7** (Serre). Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration de Serre. Choisir un point  $b_0 \in B$ . Poser  $F = p^{-1}(b_0) \subseteq E$  et choisir  $x_0$  tel que  $x_0 \in F$ . Soit l'inclusion  $j : (E, x_0) \rightarrow (E, F)$ . Alors :  $p'_* : \pi_n(E, F) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$  est bijectif,  $n \neq 0$ , où  $p' : (E, F, x_0) \rightarrow (B, b_0, b_0)$  est tel que  $p'j = p$ . Ainsi, si  $n \geq 2$ ,  $p'_*$  est un isomorphisme de groupes.

*Démonstration.* Avant de démontrer la surjectivité de  $p'_*$ , on prouve le résultat suivant :

*Affirmation :* pour tout  $n$ , pour toute homotopie basée  $G : I^n \times I \rightarrow B$ , il existe une homotopie  $\tilde{G} : I^n \times I \rightarrow E$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} I^0 & \xrightarrow{\gamma} & E \\ \gamma' \downarrow & \tilde{G} \nearrow & \downarrow p \\ I^{n+1} & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

---

3. Par convention,  $I^0 = \{0\}$ .

où on note  $\gamma : I^0 \rightarrow E$  et  $\gamma' : I^0 \rightarrow I^n \times I$  respectivement les applications continues basées  $0 \mapsto x_0$  et  $0 \mapsto (0, \dots, 0)$ .

En effet, pour  $n = 0$  cela provient de la propriété de relèvement d'homotopie de la fibration de Serre  $p$ . On suppose la propriété vraie pour  $n = r - 1$ , montrons qu'elle est aussi vraie pour  $n = r$ ,  $r > 0$ . Considérer une homotopie  $G : I^r \times I \rightarrow B$ . Par hypothèse de récurrence, comme l'application  $H := G|_{I^r \times \{0\}}$  peut être vue comme une homotopie  $I^{r-1} \times I \rightarrow B$ , il existe une homotopie  $\tilde{H} : I^{r-1} \times I \rightarrow E$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} I^0 & \xrightarrow{\gamma} & E \\ \gamma' \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ I^r & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Si bien que comme  $p$  est une fibration de Serre, il existe une homotopie  $\tilde{G} : I^r \times I \rightarrow E$  telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} I^0 & \xrightarrow{\gamma} & E \\ \gamma' \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ I^r \cong I^r \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{H}} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ I^{r+1} & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Ce qui prouve l'affirmation.

Montrons maintenant la surjectivité de  $p'_*$ .

Soit  $[g] \in \pi_n(B, b_0)$ . On rappelle que  $(I^n, \partial I^n) \cong (D^n, S^{n-1})$ . Donc  $g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ . Par l'affirmation précédente, il existe une homotopie  $G : I^n \rightarrow E$  telle que les triangles du diagramme commutent :

$$\begin{array}{ccc} I^0 & \xrightarrow{\quad} & E \\ \downarrow & \nearrow G & \downarrow p \\ I^n & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

En particulier :  $g = pG$ . Comme  $g(\partial I^n) \subseteq \{b_0\}$ , alors  $G(\partial I^n) \subseteq F$ . Si bien que  $[G] \in \pi_n(E, F)$  et  $p'_*([G]) = [pG] = [g]$ . Autrement dit  $p'_*$  est surjective.

Montrons avant la preuve de l'injectivité l'affirmation suivante :

*Affirmation : toute application continue  $f : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, F)$ ,  $n \neq 0$ , telle que  $pf$  soit homotope au lacet constant en  $b_0$  noté  $c_{b_0}$ , est homotope au lacet constant en  $x_0$  noté  $c_{x_0}$ .*

En effet ; considérer une homotopie  $H : (D^n \times I, S^{n-1} \times I) \rightarrow (B, b_0)$  telle que, pour  $z_0$  le point  $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , on ait :

$$\begin{cases} H(z, 0) = pf(z), & \forall z \in D^n, \\ H(z, 1) = b_0, & \forall z \in D^n, \\ H(z_0, t) = b_0, & \forall t \in I. \end{cases}$$



Considérer alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

où  $h(z, 0) = f(z)$  pour tout  $z$  de  $D^n$  et  $h(u, t) = f(u)$ , pour tout  $u$  de  $S^{n-1}$ , et  $t$  de  $I$ . L'application  $h$  est continue et bien définie. Comme  $f(u) \in F$  pour tout  $u$ , alors  $pf(u) = b_0$ , donc le diagramme commute. Comme  $(D^n \times I, D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I) \cong (I^{n+1}, I^n)$ , par la propriété de relèvement d'homotopie, il existe une homotopie  $\tilde{H} : D^n \times I \rightarrow E$  telle que les triangles commutent :

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I & \xrightarrow{h} & E \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ D^n \times I & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Comme  $\tilde{H}$  est une homotopie, alors  $f$  est homotope à une certaine application  $z \mapsto \tilde{H}(z, 1)$  qu'on note  $g : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (E, F)$ . Comme  $H = p\tilde{H}$ ,  $F = p^{-1}(b_0)$  et  $H(z, 1) = b_0$ , pour tout  $z$  de  $D^n$ , on a en fait :  $g : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (F, F)$ . Donc si l'on considère l'inclusion  $\iota : (F, F) \rightarrow (E, F)$ , pour  $\iota_* : \pi_n(F, F) \rightarrow \pi_n(E, F)$ , on obtient :  $\iota_*([g]) = [f]$ . Comme pour tout espace topologique  $X$ ,  $\pi_n(X, X) = 0$ , alors  $[g] = [c_{x_0}]$ , et donc  $[f] = [c_{x_0}]$ . Ce qui termine la preuve de l'affirmation.

Pour  $n \geq 2$ ,  $p'_*$  est un homomorphisme de groupes. Grâce à l'affirmation précédente, on vient de prouver que  $\ker p'_* = 0$ , autrement dit  $p'_*$  est injectif.

Pour  $n = 1$ , considérer  $[f_1], [f_2] \in \pi_1(E, F)$  tel que  $[pf_1] = [pf_2]$ . Pour  $\star$  la concaténation de chemins, on pose :  $h = \bar{f}_1 \star f_2 : (I, \partial I) \rightarrow (E, F)$ . On a :  $ph = p(\bar{f}_1 \star f_2) = p\bar{f}_1 \star pf_2 \simeq_* c_{b_0}$ . D'où par l'affirmation précédente,  $h$  est homotope à une application constante. Ainsi :  $f_2 \simeq f_1 \star h \simeq f_1$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

On obtient alors une propriété particulièrement intéressante sur les fibrations de Serre :

**Corollaire 2.1.8.** Pour les mêmes hypothèses que précédemment (théorème 2.1.7), on obtient la longue suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi_0(E) & \longleftarrow & \pi_0(F) & \longleftarrow & \pi_1(B) & \longleftarrow & \pi_1(E) & \longleftarrow & \pi_1(F) & \longleftarrow & \pi_2(B) \\ & & & & & & & & & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(B) & \longrightarrow & \pi_n(F) & \longrightarrow & \pi_n(E) & \longrightarrow & \pi_n(B) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \pi_2(E) \end{array}$$

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la longue suite exacte mentionnée à la page 18, de remplacer le couple  $(X, A)$  par  $(E, F)$  et d'utiliser le théorème 2.1.7 précédent qui affirme alors que  $\pi_n(E, F)$  est isomorphe à  $\pi_n(B, b_0)$ , pour  $n \geq 2$ , et est en bijection d'ensembles pour  $n = 1$ .  $\square$

Montrons maintenant que tout fibré est une fibration de Serre. Pour cela, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 2.1.9.** Soit  $p : E \rightarrow B$  une application continue. Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $B$  tel que pour tout  $U$  de  $\mathcal{U}$ , l'application induite par  $p$ ,  $p_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$ , soit une fibration de Serre. Alors  $p$  est une fibration de Serre.

*Démonstration.* Considérer  $G : I^n \times I \rightarrow B$  une homotopie et un relèvement de  $Gi_0$  par  $p$ ,  $\tilde{g} : I^n \times \{0\} \rightarrow E$ . Considérer ensuite le recouvrement ouvert  $\{G^{-1}(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$  de l'espace métrique compact  $I^n \times I$ .

Soit  $\delta > 0$  un nombre de Lebesgue du recouvrement, où  $\delta = \frac{1}{N}$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . On peut subdiviser  $I^n$  par des cubes  $K = \prod_{i=1}^n I_{k_i}$  où  $I_{k_i} = [\frac{k_i}{N}, \frac{k_i+1}{N}]$ , où  $k_i$  est un entier tel que  $0 \leq k_i < N$ , pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Une face de dimension  $\ell \in \{0, \dots, n\}$  d'un cube  $K$  est obtenue en remplaçant  $n - \ell$  intervalles  $I_{k_i}$  par un point de  $\partial I_{k_i}$  au produit  $\prod_{i=1}^n I_{k_i}$ .

Choisir  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$  tel que  $t_{j+1} - t_j < \delta$ , pour tout  $0 \leq j < m$ . Si bien que l'on peut supposer que  $\delta = \frac{1}{N}$  est tel que pour tout cube  $K$  et tout  $0 \leq j < m$ , il existe  $U$  de  $\mathcal{U}$  tel que  $G(K \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq U$ . Notons  $V^\ell \subseteq I^n$  l'union de toutes les faces de dimension  $\ell$  des tous les cubes. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} I^n \times \{0\} \cup V^{\ell-1} \times [0, t_1] & \xrightarrow{g_{\ell-1}} & E \\ \downarrow & \nearrow g_\ell & \downarrow p \\ I^n \times \{0\} \cup V^\ell \times [0, t_1] & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

où  $V^{-1} := \emptyset$  et  $g_{-1} = \tilde{g}$ . On prouve par la suite l'existence de  $g_\ell$  par induction sur  $\ell$ .

Considérer pour cela une face  $C$  de dimension  $\ell$  d'un cube  $K$ . La face  $C$  est aussi un cube, et on peut considérer  $\partial C$  comme l'union des faces de  $C$  de dimension  $(\ell - 1)$ . On va étendre  $g_{\ell-1}$  sur le cube  $C$ , par une application  $\tilde{G}_C$ . Il existe un ouvert  $U$  du recouvrement  $\mathcal{U}$  tel que  $G(C \times [0, t_1]) \subseteq U$ . On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} C \times \{0\} \cup \partial C \times [0, t_1] & \xrightarrow{g_{\ell-1}} & p^{-1}(U) \\ \downarrow & \nearrow \tilde{G}_C & \downarrow p_U \\ C \times [0, t_1] & \xrightarrow{G} & U \end{array}$$

Comme  $p_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$  est une fibration de Serre, alors l'homotopie  $\tilde{G}_C$  existe. On utilise :  $(C \times [0, t_1], C \times \{0\} \cup \partial C \times [0, t_1]) \cong (I^\ell \times I, I^\ell \times \{0\})$ . En procédant ainsi, on peut définir l'homotopie  $\tilde{G}_{t_1}$  voulue sur  $I^n \times [0, t_1]$ . On réitère le même argument sur  $I^n \times [t_1, t_2]$  avec la condition initiale  $\tilde{G}_{t_1}$ , restreinte  $I^n \times \{t_1\}$ . On continue ainsi de suite sur  $j = 1, 2, \dots, m - 1$ . On a alors l'homotopie  $\tilde{G} : I^n \times I \rightarrow E$  voulue.  $\square$

**Théorème 2.1.10.** Soit  $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$  un fibré. Alors  $p : E \longrightarrow B$  est une fibration de Serre.

*Démonstration.* Par la définition 1.1.1 des fibrés, il existe un recouvrement ouvert  $\{U_\alpha\}$  de  $B$  où pour tout  $U_\alpha$  du recouvrement, il existe une trivialisation locale  $h_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times F$ . Pour démontrer le théorème, on applique le lemme 2.1.9, c'est-à-dire qu'il suffit de prouver que les applications induites  $p_{U_\alpha} : p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha$  sont des fibrations de Serre.

Pour cela, considérer une homotopie  $H : I^n \times I \rightarrow U_\alpha$  quelconque, et l'application continue  $\tilde{h}_0 : I^n \times \{0\} \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$  relèvement de  $Hi_0$  par  $p_{U_\alpha}$ , où  $i_0$  est l'inclusion  $I^n \times \{0\} \hookrightarrow I^n \times I$ . Par définition des fibrés on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} I^n \times \{0\} & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow[\cong]{h_\alpha} & U_\alpha \times F \\ \downarrow r & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p_{U_\alpha} & \nearrow pr_1 & \\ I^n \times I & \xrightarrow{H} & U_\alpha & & \end{array}$$

Pour construire le relèvement  $\tilde{H} : I^n \times I \rightarrow U_\alpha \times F$ , il suffit de considérer une rétraction  $r : I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\}$ , et donc poser :

$$\tilde{H}(x, t) = \left( H(x, t), \text{pr}_2(h_\alpha(\tilde{h}_0(r(x, t))) \right),$$

pour tout  $(x, t) \in I^n \times I$ , où  $\text{pr}_2 : U_\alpha \times F \rightarrow F$  est la projection sur le deuxième facteur. L'homotopie  $\tilde{H}$  est bien continue et les triangles du diagramme commutent.  $\square$

**Remarque 2.1.11.** La preuve du théorème précédent montre implicitement que tout fibré produit (défini à la page 3) est en fait une fibration.

En faite, si  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$  est un fibré avec espace de base  $B$  paracompact de Hausdorff, alors  $p$  est une fibration (voir [15] page 96). Ainsi, nos fibrations de Hopf sont bien des fibrations.

Ainsi on obtient par les résultats précédents le corollaire suivant :

**Corollaire 2.1.12** (La longue suite exacte des fibrés). Pour tout fibré  $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ , on a la longue suite exacte suivante :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(F) & \longrightarrow & \pi_n(E) & \longrightarrow & \pi_n(B) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(F) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \pi_1(F) \\ & & & & & & & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & & & & & & & \pi_0(E) \longleftarrow \pi_0(F) \longleftarrow \pi_1(B) \longleftarrow \pi_1(E) \end{array}$$

## 2.2 Théorème de la somme directe

La suite exacte d'homotopie d'un couple énoncée à la page 18, possède une conséquence générale en homotopie. Le théorème 2.1.7 de Serre induira un résultat particulier sur les fibrés. Mais avant cela, énonçons une notion d'algèbre : l'extension de groupes.

**Définition 2.2.1.** Soit  $G, H$  et  $K$  des groupes.  $G$  est une *extension de groupes* de  $H$  par  $K$ , s'il existe un homomorphisme injectif  $i : K \rightarrow G$  et un homomorphisme surjectif  $j : G \rightarrow H$  tel que  $\text{im}(i) = \ker(j)$ . Autrement dit, il existe une suite courte exacte  $K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} H$ .

Une *section* de  $j$  est un homomorphisme  $s : H \rightarrow G$  tel que  $js = \text{id}_H$ . Une *rétraction* de  $i$  est un homomorphisme  $r : G \rightarrow K$  tel que  $ri = \text{id}_K$ .

**Lemme 2.2.2** (Lemme de séparation). Soit  $K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} H$  une extension de groupes abéliens. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe une rétraction  $r$  de  $i$ ,
- (ii) il existe une section  $s$  de  $j$ ,
- (iii)  $G$  est isomorphe à la somme directe  $K \oplus H$ , où  $i$  correspond à l'inclusion naturelle de  $K$  et  $j$  la projection naturelle sur  $H$ .

De plus, si les groupes sont non abéliens, alors l'équivalence est vraie seulement entre les assertions (i) et (iii).

*Démonstration.* Pour le cas abélien, on montre uniquement que (ii) implique (iii). Tout élément  $g$  de  $G$  est un élément de  $\ker(j) + \text{im}(s)$ . En effet,  $g = (g - sj(g)) + sj(g)$ . Clairement  $sj(g) \in \text{im}(s)$ . De plus,  $(g - sj(g)) \in \ker(j)$ , car :

$$j(g - sj(g)) = j(g) - (js)j(g) = j(g) - j(g) = 0.$$

On a :  $\ker j \cap \text{im}(s) = \{0\}$  car si  $g \in \ker j \cap \text{im}(s)$ , alors  $j(g) = 0$  et il existe  $h$  de  $H$  tel que  $s(h) = g$ , mais alors on a :  $0 = js(h) = h$ , et donc  $g = s(h) = 0$ . Par exactitude,  $\text{im}(i) = \ker(j)$ , comme  $i$  est injectif, alors  $\text{im}(i) \cong K$ , et donc  $K \cong \ker j$ . Comme  $js$  est bijectif, alors  $s$  injectif, et ainsi  $\text{im}(s) \cong H$ .

Pour le cas non abélien, montrons uniquement que (i) implique (iii). Cela provient du fait que l'application  $r \times j : G \rightarrow K \times H$  est un isomorphisme.  $\square$

**Théorème 2.2.3.** Soit le couple basé  $(X, A, x_0)$  d'espaces topologiques. Supposer qu'il existe une homotopie pointée de l'inclusion  $i : A \hookrightarrow X$  à l'application  $f$  constante sur  $A$  en  $x_0$ . Alors on a l'isomorphisme suivant :  $\pi_n(X, A) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_{n-1}(A)$ , pour  $n \geq 2$ .

Plus précisément,  $\pi_n(X, A)$  se décompose en la somme directe de deux sous-groupes  $M$  et  $N$ , tel qu'il existe un isomorphisme entre  $M$  et  $\pi_{n-1}(A)$ , ainsi qu'entre  $N$  et  $\pi_n(X)$ .

*Démonstration.* Définir l'inclusion  $j : (X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$  et  $\partial : \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}(A)$  par  $[\beta] \mapsto [\beta]_{I^{n-1} \times \{0\}}$ . On rappelle qu'on obtient la longue suite exacte suivante<sup>4</sup> :

$$\dots \longrightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \pi_{n-1}(X) \longrightarrow \dots$$

On considère dorénavant que  $n \geq 2$ . Soit  $h : A \times I \rightarrow X$  une homotopie basée de  $i$  à  $f$ . Pour tout application continue  $g : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$ , définir l'opération :

$$(h \diamond g)(t_1, \dots, t_n) = h(g(t_1, \dots, t_{n-1}), t_n),$$

pour tout  $(t_1, \dots, t_n) \in I^n$ . On peut voir que  $h \diamond g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, A)$ . Il est facile de vérifier que l'opération  $g \mapsto h \diamond g$  préserve l'addition et la relation d'homotopie. Ainsi  $h$  induit un homomorphisme  $h_* : \pi_{n-1}(A) \rightarrow \pi_n(X, A)$ .

Poser maintenant  $M := \text{im}(h_*)$ , et  $N := \text{im}(j_*)$ , ce sont des sous-groupes de  $\pi_n(X, A)$ . L'application constante  $f$  induit un homomorphisme nul de  $\pi_{n-1}(A)$  à  $\pi_{n-1}(X)$ . Comme  $i \simeq_* f$ , il en est de même pour  $i$ , autrement dit :  $\ker(i_*) = \pi_{n-1}(A)$ . Ainsi par exactitude, on a :  $\text{im}(\partial) = \pi_{n-1}(A)$ . Donc  $\partial$  est surjectif. Comme  $\ker(j_*) = \text{im}(i_*) = 0$ , alors  $j_*$  est un isomorphisme sur la corestriction sur  $N$ .

Ainsi  $\pi_n(X, A)$  est une extension de groupes de  $\pi_{n-1}(A)$  par  $\pi_n(X)$ . Or, pour tout  $[g] \in \pi_{n-1}(A)$ , remarquer que l'on a :  $\partial hg = g$ . Donc  $\partial h_*$  est l'identité, c'est-à-dire que  $h_*$  est une section de  $\partial$ . Pour  $n \geq 3$ , les groupes sont abéliens et donc d'après le lemme 2.2.2, le théorème est prouvé.

Pour  $n = 2$ , considérer l'application  $g' : (I^2, \partial I^2, J^1) \rightarrow (X, A, x_0)$  continue. Définir l'opération  $(k \diamond g') : (I^2, \partial I^2) \rightarrow (X, x_0)$ , par :

$$(k \diamond g')(t_1, t_2) = \begin{cases} h(g'(t_1, 0), 1 - 2t_2), & 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2}, \\ g'(t_1, 2t_2 - 1), & \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1. \end{cases}$$

On peut voir que  $k$  est bien définie et qu'il induit un homomorphisme  $k_* : \pi_2(X, A) \rightarrow \pi_2(X)$ . De plus,  $k_*$  est une rétraction de  $j_*$ , et donc on a prouvé le théorème.  $\square$

On obtient une conséquence intéressante sur les fibrés.

**Corollaire 2.2.4** (Théorème de la somme directe).<sup>5</sup> Soit  $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$  un fibré. Choisir les points  $b_0 \in B$  et  $x_0 \in p^{-1}(b_0) =: F_{b_0}$ . Si la fibre  $F_{b_0}$  est contractile dans l'espace total  $E$  au point  $x_0$ , alors on a l'isomorphisme :  $\pi_n(B) \cong \pi_{n-1}(F) \oplus \pi_n(E)$ , pour tout  $n \geq 2$ .

*Démonstration.* On obtient l'isomorphisme :  $\pi_n(E, F) \cong \pi_{n-1}(F) \oplus \pi_n(E)$ , par le théorème précédent. Comme  $p$  est une fibration de Serre, on obtient  $\pi_n(E, F) \cong \pi_n(B)$ , par le théorème 2.1.7, ce qui prouve le résultat.  $\square$

4. Pour une preuve, voir [6], page 344.

5. Il existe deux autres «théorèmes de la somme directe», ils sont énoncés et prouvés par NORMAN STEENROD à la référence [16], paragraphes 17.7 et 17.9.

## 2.3 Les groupes d'homotopie des sphères

Les fibrés mentionnés au chapitre 1 vont permettre de calculer des groupes d'homotopie des espaces sur lesquels ils sont définis. On suppose connus les deux résultats suivants :

**Proposition 2.3.1.** Pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ .

**Proposition 2.3.2.** Pour tout  $k, n \geq 1$ , si  $k < n$ , alors  $\pi_k(S^n) = 0$ .

Considérer le fibré  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$  défini à l'exemple 1.2.8 à la page 5. On obtient le résultat suivant sur le cercle.

**Proposition 2.3.3.** On a :  $\pi_n(S^1) = 0$ , si  $n \geq 2$ .

*Démonstration.* On rappelle que  $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$  et  $\pi_n(\mathbb{Z}) = 0$  si  $n \geq 1$ . Ainsi, de la suite exacte des fibrés (corollaire 2.1.12) :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi_0(\mathbb{R}) & \longleftarrow & \pi_0(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \pi_1(S^1) & \longleftarrow & \pi_1(\mathbb{R}) & \longleftarrow & \pi_1(\mathbb{Z}) & \longleftarrow & \pi_2(S^1) \\ & & & & & & & & & & \uparrow \\ \cdots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(S^1) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \pi_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \pi_n(S^1) & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \pi_2(\mathbb{R}) \end{array}$$

on obtient alors :

$$0 \longrightarrow \pi_n(S^1) \longrightarrow 0, \text{ pour } n \geq 2.$$

On obtient immédiatement que  $\pi_n(S^1) = 0$ , pour tout  $n \geq 2$ . □

On considère ensuite la fibration de Hopf suivante :  $S^1 \longrightarrow S^3 \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} S^2$  (définie à la page 15). Elle permet de déduire le résultat suivant.

**Proposition 2.3.4.** On a l'isomorphisme suivant :  $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$ , pour tout  $n \geq 3$ . En particulier :  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* D'après la proposition 2.3.3, par la suite exacte des fibrés  $S^1 \longrightarrow S^3 \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} S^2$ , on obtient en particulier la suite exacte suivante pour tout  $n \geq 3$  :

$$\pi_n(S^1) = 0 \xrightarrow{g_1} \pi_n(S^3) \xrightarrow{g_2} \pi_n(S^2) \xrightarrow{g_3} 0 = \pi_{n-1}(S^1).$$

Alors par les propriétés d'une suite exacte longue, on a pour tout  $n \geq 3$  :  $\ker(g_2) = \text{im}(g_1) = 0$  et  $\text{im}(g_2) = \ker(g_3) = \pi_n(S^2)$ , si bien que  $g_2$  est un isomorphisme de groupes.

En particulier, par la proposition 2.3.1,  $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ , et donc on obtient par précédemment :  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ . □

**Remarque 2.3.5.** Dans la preuve précédente, on peut aussi redémontrer que  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ , grâce au fibré  $S^1 \longrightarrow S^3 \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} S^2$ , car d'après la proposition 2.3.2, on a :

$$\pi_2(S^3) = 0 \longrightarrow \pi_2(S^2) \longrightarrow \mathbb{Z} = \pi_1(S^1) \longrightarrow 0 = \pi_1(S^3).$$

**Remarque 2.3.6.** Le fait que  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$  signifie, entre autres, qu'il existe une infinité d'applications continues  $S^3 \rightarrow S^2$  non-homotopes. Ce fait avait été établi par HOPF en 1931.

Plus généralement, si l'on considère le fibré  $S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \xrightarrow{p_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}P^n$ ,  $n \neq 0$ , défini à la page 12, par le même raisonnement que précédemment, on peut démontrer le résultat suivant.

**Proposition 2.3.7.** On a l'isomorphisme :  $\pi_k(\mathbb{C}P^n) \cong \pi_k(S^{2n+1})$ , pour tout  $k \geq 3$  et pour tout  $n \geq 1$ . En particulier, par la proposition 2.3.2, pour tout  $3 \leq k < 2n+1$ , on obtient  $\pi_k(\mathbb{C}P^n) = 0$ .

Considérer maintenant une autre fibration de Hopf :  $S^3 \longrightarrow S^7 \xrightarrow{p_{\mathbb{H}}} S^4$ . On obtient le résultat suivant :

**Proposition 2.3.8.** Pour  $2 \leq n \leq 6$  : on a l'isomorphisme suivant :  $\pi_n(S^4) \cong \pi_{n-1}(S^3)$ .  
Donc :  $\pi_n(S^4) \cong \pi_{n-1}(S^3) \cong \pi_{n-1}(S^2)$ , pour  $4 \leq n \leq 6$ , par les précédents résultats.

*Démonstration.* On utilise encore la proposition 2.3.2, on a la suite exacte suivante pour tout  $2 \leq n \leq 6$  :

$$\pi_n(S^7) = 0 \longrightarrow \pi_n(S^4) \longrightarrow \pi_{n-1}(S^3) \longrightarrow 0 = \pi_{n-1}(S^7),$$

ce qui prouve le résultat.  $\square$

Plus généralement, le fibré  $S^3 \longrightarrow S^{4n+3} \xrightarrow{p_{\mathbb{H}}} \mathbb{H}P^n$ , donne similairement le résultat qui suit :

**Proposition 2.3.9.** On a l'isomorphisme suivant pour tout  $2 \leq k < 4n+3$  :  $\pi_k(\mathbb{H}P^n) \cong \pi_{k-1}(S^3)$ .

De plus, on peut aussi montrer l'assertion suivante :

**Proposition 2.3.10.** Pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $\pi_n(S^4) \cong \pi_{n-1}(S^3) \oplus \pi_n(S^7)$ .<sup>6</sup> En particulier, on a :  $\pi_7(S^4) \cong \pi_6(S^3) \oplus \mathbb{Z}$ , et donc  $\mathbb{Z} \subseteq \pi_7(S^4)$ .

*Démonstration.* On applique le théorème de la somme directe 2.2.4, car  $S^3$  est contractile dans  $S^7$ .  $\square$

Enfin la fibration de Hopf  $S^7 \longrightarrow S^{15} \xrightarrow{p_{\mathbb{O}}} S^8$  fournit les propositions suivantes.

**Proposition 2.3.11.** Pour tout  $1 \leq n \leq 13$ ,  $\pi_{n+1}(S^8) \cong \pi_n(S^7)$ .

*Démonstration.* Noter que si  $1 \leq n \leq 7$ , le résultat était déjà connu.

Pour tout  $1 \leq n \leq 13$ , on obtient la suite exacte :

$$\pi_{n+1}(S^{15}) = 0 \longrightarrow \pi_{n+1}(S^8) \longrightarrow \pi_n(S^7) \longrightarrow 0 = \pi_n(S^{15}).$$

$\square$

**Proposition 2.3.12.** Pour tout  $n \geq 2$ , on a :  $\pi_n(S^8) \cong \pi_{n-1}(S^7) \oplus \pi_n(S^{15})$ .<sup>7</sup> En particulier, on a :  $\pi_{15}(S^8) \cong \pi_{14}(S^7) \oplus \mathbb{Z}$ , et donc  $\mathbb{Z} \subseteq \pi_{15}(S^8)$ .

*Démonstration.* On applique le théorème de la somme directe 2.2.4, car  $S^7$  est contractile dans  $S^{15}$ .  $\square$

On résume les résultats principaux obtenus par le tableau suivant :

|                                                        |                                |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------|
| $\pi_n(S^1) = 0$                                       | $n \geq 2$                     |
| $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$                          | $n \geq 3$                     |
| $\pi_n(S^4) \cong \pi_{n-1}(S^3)$                      | $2 \leq n \leq 6$              |
| $\pi_n(S^8) \cong \pi_{n-1}(S^7)$                      | $2 \leq n \leq 14$             |
| $\pi_n(S^4) \cong \pi_{n-1}(S^3) \oplus \pi_n(S^7)$    | $n \geq 2$                     |
| $\pi_n(S^8) \cong \pi_{n-1}(S^7) \oplus \pi_n(S^{15})$ | $n \geq 2$                     |
| $\pi_k(S^{2n+1}) \cong \pi_k(\mathbb{C}P^n)$           | $n \geq 1, k \geq 3$           |
| $\pi_{k-1}(S^3) \cong \pi_k(\mathbb{H}P^n)$            | $n \geq 1, 2 \leq k \leq 4n+2$ |

TABLE 2.1 – Isomorphismes des groupes d'homotopie des sphères.

Les résultats particuliers étaient :

$$\begin{aligned} \pi_3(S^2) &= \mathbb{Z}, \\ \pi_7(S^4) &\cong \pi_6(S^3) \oplus \mathbb{Z}, \\ \pi_{15}(S^8) &\cong \pi_{14}(S^7) \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

6. Pour  $2 \leq n \leq 6$ , on retrouve  $\pi_n(S^4) \cong \pi_{n-1}(S^3)$ .

7. Pour  $2 \leq n \leq 14$ , on retrouve :  $\pi_n(S^8) \cong \pi_{n-1}(S^7)$ .

# Conclusion

A travers différents fibrés, il a été possible de déterminer quelques groupes d'homotopie des sphères notamment grâce aux fibrations de Hopf.

Il existe des fibrés définis sur d'autres espaces, par exemple, où l'espace total est une variété de Stiefel, la base une variété de Grassmann et les fibres sont des groupes orthogonaux, des groupes unitaires ou des groupes symplectiques selon les cas. On invite à regarder la référence [6] pages 381-384.

Ainsi, les fibrés fournissent une méthode élémentaire de calcul en homotopie. Bien que les réponses données ne soient que partielles, elles permettent néanmoins de mettre en évidence la difficulté redoutable du calcul des groupes d'homotopie.

Nous avons simplement défini la notion générale de fibré et présenter leur utilisation dans le calcul en homotopie, mais il existe beaucoup d'autres applications. Il existe des notions plus précises de fibré vectoriel, de fibré différentiable, etc, qui sont d'une grande importance en géométrie algébrique, ou encore en physique.

## Remerciement

Mes remerciements vont à Marc Stephan, sans qui, mon projet n'aurait pas été. Je le remercie d'avoir pris de son temps pour me donner des explications claires et utiles à la bonne compréhension de mon sujet. Je tiens à remercier aussi la professeure Kathryn Hess-Bellwald de m'avoir accordé ce projet.

# Bibliographie

- [1] J. C. Baez. *Octonions*. Bulletin of the American Mathematical Society, 39, 2002, 145-205.
- [2] N. Bourbaki. *Éléments de Mathématiques, Algèbres*. Hermann, 1964.
- [3] T. T. Dieck. *Algebraic Topology*. European Mathematical Society, 2008.
- [4] B. Eckmann. *Naissance des fibrés et homotopie*. Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XXe siècle - Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné, Séminaires et Congrès 3, 1998.
- [5] N. El Hage Hassan. *Topologie Générale et Espaces Normés*. Dunod, Paris, 2011.
- [6] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, New York, 2002.
- [7] D. Husemoller. *Fibre Bundles*. McGraw Hill, New York, 1966.
- [8] S. Mac Lane. *Homology*. Springer Classics in Mathematics, 1975.
- [9] J. P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. University of Chicago Press, 1999.
- [10] J. R. Munkres. *Topology*. Upper Saddle River : Prentice Hall, 2000.
- [11] E. A. Piccinini. *Lectures on Homotopy Theory*. North Holland, 1992.
- [12] H. Queffélec. *Topologie*. Dunod, Paris, quatrième édition, 2012.
- [13] J. J. Rotman. *Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York Inc, 1998.
- [14] R. D. Schafer. *An Introduction to Nonassociative Algebras*. Dover Publications, New York, 1966.
- [15] E. H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1966.
- [16] N. Steenrod. *Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951.
- [17] M. Zorn. *Alternative Rings and Related Questions I : Existence of the Radical*. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 42, No. 3, 1941, 676-686.